周期関数であること

$y = \sin\theta$ と $y = \cos\theta$ が、周期 2π の周期関数であることは、2π ごとに同じ y の値が巡ってくることを意味する。それは、たとえば $\sin\theta$ については $\sin(\theta + 2\pi) = \sin\theta$ が成り立つことでもある。このことを一般に

$$\boxed{\sin(\theta + 2n\pi) = \sin\theta、\quad \cos(\theta + 2n\pi) = \cos\theta \quad (n = 0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots)}$$

で表している。

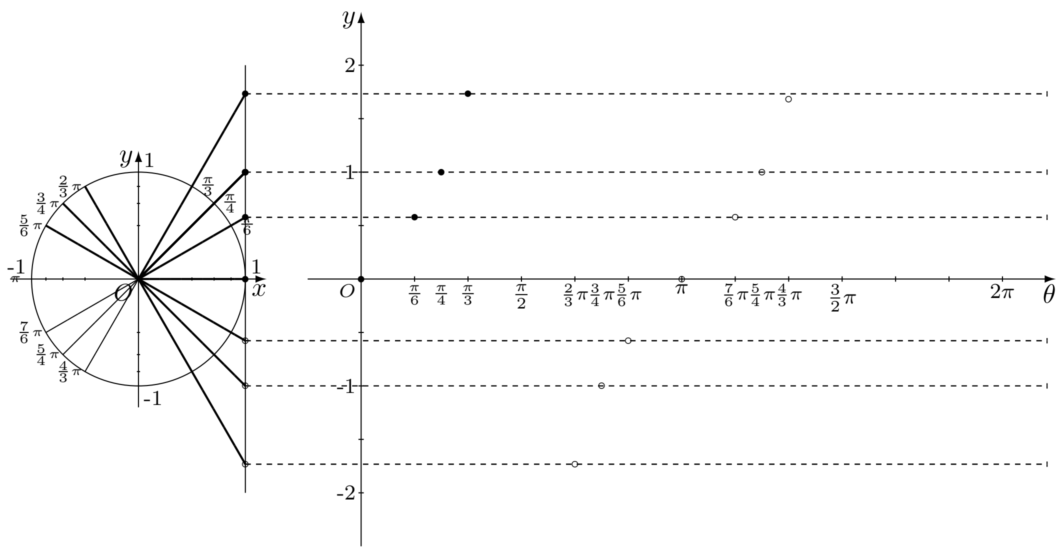
この段階では周期関数は三角関数だけであるが、三角関数に限らなくとも

$$\boxed{f(x + np) = f(x) \quad (n = 0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots) \text{ が成り立つ } f(x) \text{ を周期関数という}}$$

のである。

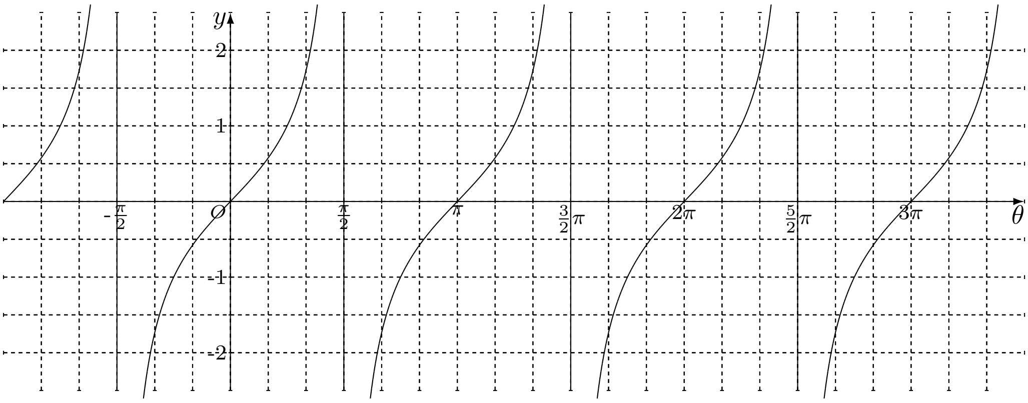
$y = \tan\theta$ のグラフ

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ であったのだから、$y = \tan\theta$ も周期 2π の周期関数になりそうな気がするが、実際はそうではない。



$\tan\theta$ の値は、単位円上の直線 $x = 1$ の目盛の値である。それは、原点と円周上の点を結ぶ線分の延長が $x = 1$ と交わる点である。$0 \leqq \theta < \pi$ の範囲を調べれば分かるように、$\tan\theta$ の値は $x = 1$ 上のすべてをとる。ただし、$\theta = \dfrac{\pi}{2}$ のときは動径が直線 $x = 1$ と平行になって、値をとれないこ

とに注意しよう。同様に $\pi \leqq \theta < 2\pi$ の範囲でも、$\theta = \dfrac{3}{2}\pi$ を除いた $x = 1$ 上のすべてをとるのだが、実際は $0 \leqq \theta < \pi$ の範囲をなぞっているに過ぎない。つまり、周期は π である。そのことは、$x = 1$ 上の点を θ-y 座標に写してみれば分かる。



$\tan\theta$ は $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ や $\dfrac{3}{2}\pi$ では値をとらないので、$x = \dfrac{\pi}{2}$ や $x = \dfrac{3}{2}\pi$ 上に点はなく、同時にそれらの直線が漸近線となっている。このことから

$$\boxed{\tan(\theta + n\pi) = \tan\theta \quad (n = 0,\, \pm 1,\, \pm 2,\, \ldots)}$$

であることが分かる。

三角比の逆数関数

三角比は直角三角形の 3 辺から 2 辺を選んで比にしたものであった。3 辺から 2 辺を選ぶ選び方は 3 通りであるから、三角比もたしかに 3 種類ある。しかし、よく考えてみると、比の取り方は正・逆 2 通りあるはずである。たとえば（斜辺）と（対辺）の比は、（対辺）:（斜辺）か（斜辺）:（対辺）のどちらでもよいのである。（対辺）:（斜辺）は sin として定義したので、（斜辺）:（対辺）は $\dfrac{1}{\sin}$ ということになる。そこで sin の逆比の関数を

$$\boxed{y = \frac{1}{\sin\theta} = \operatorname{cosec}\theta}$$

と定義しよう[1]。同様に、cos と tan についても

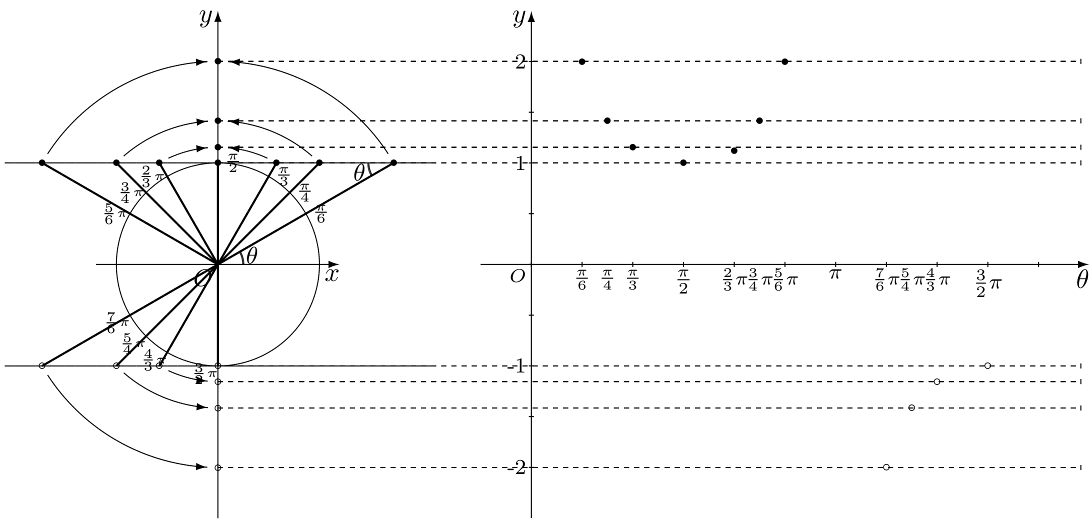
$$\boxed{y = \frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta、\quad y = \frac{1}{\tan\theta} = \cot\theta}$$

と定義する[2]。これで考え得るすべての三角関数が定義されたことになる。

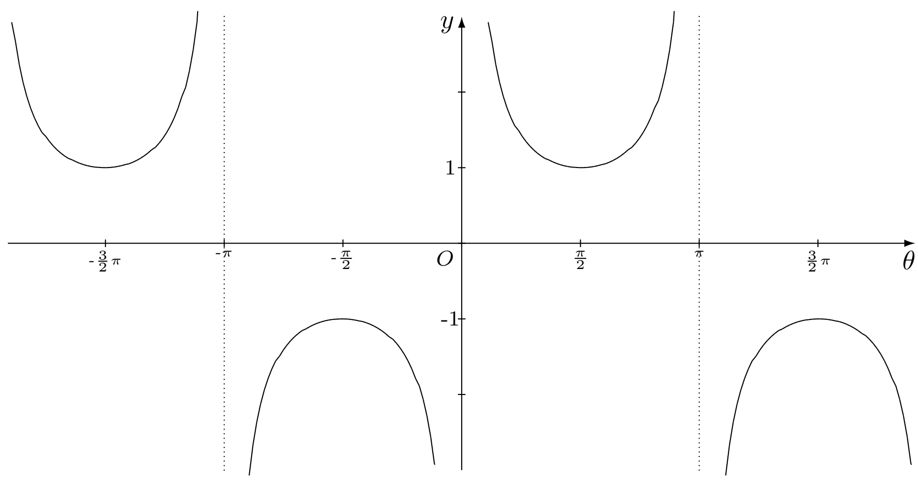
[1]cosec は “コセカント” と読む。csc と書くこともある。
[2]sec は “セカント”、cot は “コタンジェント” と読む。

$y = \operatorname{cosec}\theta$ のグラフ

$y = \operatorname{cosec}\theta$ のグラフの様子を知るには少々工夫がいる。$y = \sin\theta$ の値は、単位円の半径が 1 であることから y 座標を読み取ればよかった。$y = \operatorname{cosec}\theta$ は逆に y 座標が 1 の場合の斜辺にあたるので、単位円上にそのような作図ができなくてはならない。



図は複雑そうに見えるが、動径と x 軸とのなす角が θ であるとき、$(0,\ 1)$ を通る直線 $y = 1$ と動径が作る角も θ であることに注意すれば、y 軸上の区間 $[0,\ 1]$ が θ の対辺にあたり、その長さは 1 である。したがって、延長した動径の長さ— R とする—が斜辺になり、よって $\sin\theta = \dfrac{1}{R}$ であるから $R = \dfrac{1}{\sin\theta}$ となる。すなわち、延長した動径の長さがそのまま $\operatorname{cosec}\theta$ の値である。そこで動径の延長を原点中心に回転させれば、$\operatorname{cosec}\theta$ の値を y 軸に写すことができる。



グラフは放物線の集まりではない。θ が 0 や π に近いときは、動径の延長は直線 $y = 1$ や直線 $y = -1$ に交わらず無制限に延びていく。したがって、$\theta = 0$ や $\theta = \pi$ が漸近線となっている。

*　*　*

$y = \sin\theta$ のグラフはよく目にしても、$y = \mathrm{cosec}\,\theta$ のグラフはあまり目にしないだろう。いまの手順が複雑だと感じたら Microsoft Excel で大まかなグラフを描いてみるのもよい。

◇	A	B	C	D	E	F
1	θ	cosec θ				
2	0					
3	0.314	（※ **B3**）				
4	↓ **A2-3** を選択し	↓下へコピーする				
5	↓下へドラッグする	↓				
6	↓	↓				

※ セルの式
（B3）　=1/SIN(A3)

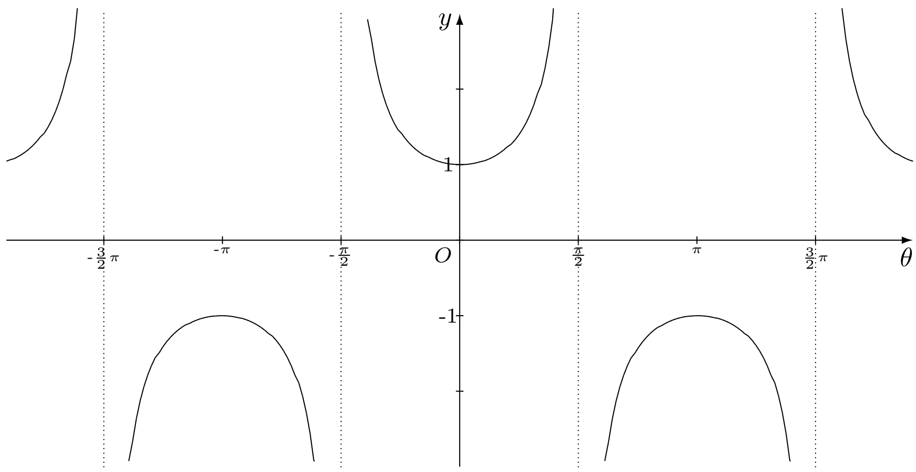
Excel では本当に大まかなグラフしか描けないので、A 列の θ の値は近似値で十分だろう。θ の区間幅は $\dfrac{\pi}{10}$ のつもりなので、A 列 2–3 行をドラッグコピーする。B 列に $\mathrm{cosec}\,\theta$ の式を入力したら、適当なセル範囲を選択して、メニューからグラフ（散布図）を選択すればよい。ただし `3.14` の倍数にあたるセルは、B2 セルのように空セルにしておかないと、とんでもないグラフが出来上がってしまうので注意が必要である。▌

$y = \sec\theta$、$y = \cot\theta$ のグラフ

$y = \mathrm{cosec}\,\theta$ のグラフと同様に $y = \sec\theta$、$y = \cot\theta$ のグラフも調べたいのだが、単位円を用いて点を打つような無駄は必要ないのである。なぜなら

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right)} = \frac{1}{-\sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{2}\right)} = -\mathrm{cosec}\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$$

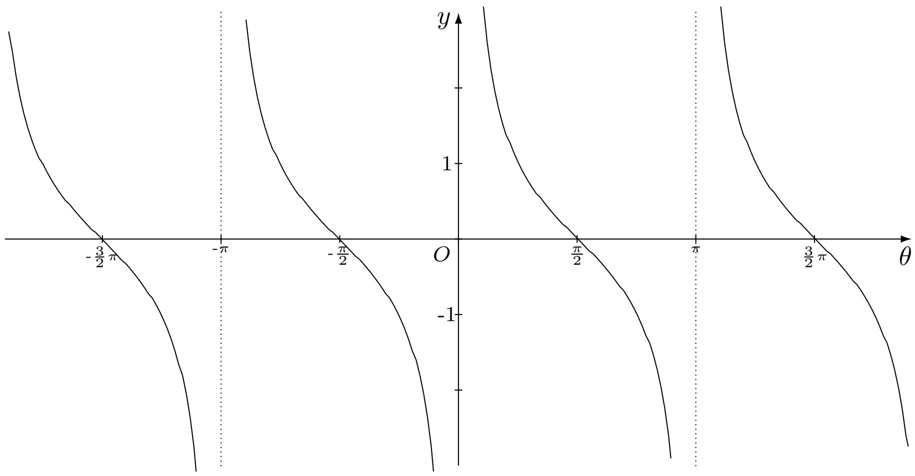
であるから、$\sec\theta$ は $\mathrm{cosec}\,\theta$ と正負が逆であり、かつ θ 軸の正の方向へ $\dfrac{\pi}{2}$ だけずれたグラフであることが分かる。すなわち、$y = \sec\theta$ のグラフは



である。同様に、

$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = -\tan\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$$

であるから、$\cot\theta$ は $\tan\theta$ と正負が逆であり、かつ θ 軸の正の方向へ $\dfrac{\pi}{2}$ だけずれたグラフであることが分かる。したがって、$y = \cot\theta$ のグラフは



である。