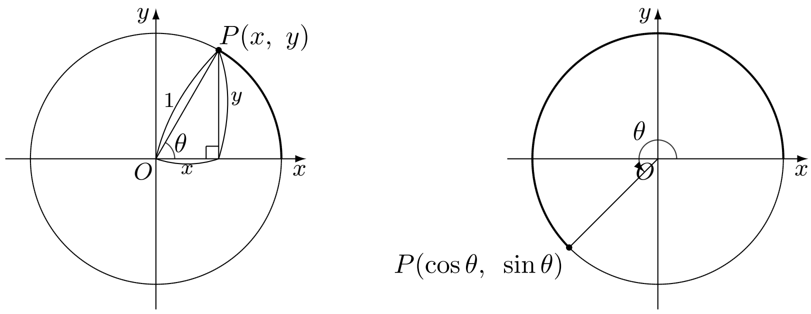
三角比の再定義

半径 1 の円周を利用して角度を測ることにすると、三角比も見通しがよくなってくる。いま、円周上に動点 P をとり、x 軸へ垂線を下ろすと直角三角形ができる。動点の座標を $P(x,\ y)$ とすれば直角三角形は、斜辺の長さが 1 で、他の 2 辺の長さは x、y になる。



すると、三角比の定義より

$$\cos\theta = \frac{x}{1} = x, \qquad \sin\theta = \frac{y}{1} = y$$

であることが分かる。このことから動点 P が角 θ の位置にあるとき、$P(x,\ y) = P(\cos\theta,\ \sin\theta)$ となる。これは三角比の定義を、直角三角形の辺の比でなく、半径 1 の円周上の点の座標に置き換えることができること意味する。

半径 1 の円周上にある動点は、時計回りにも反時計回りにも動き、また何回転でもすることができる。つまり動点の取りうる値、すなわち角の値は $-\infty$ から $+\infty$ の間で無制限となるのである。それに対して、動点の x 座標と y 座標は常に 1 つに決まるので、三角比の値は角の値の関数になる。関数の式は

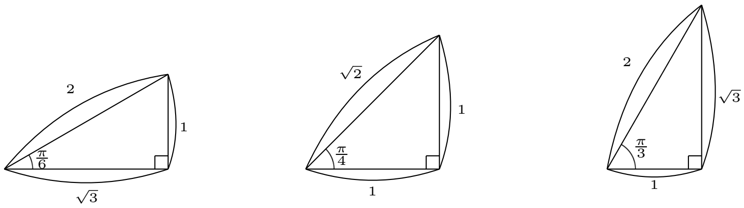
$$x = \cos\theta, \qquad y = \sin\theta$$

であり、三角比の関数という意味で**三角関数**とよばれる。

三角比から三角関数へ

三角関数 $y = \sin\theta$ について考える。関数というのは、定義域の変数—この場合は θ —に 1 つの値を与えると、値域の変数—この場合は y —の値が 1 つ決まるものである。三角比を三角関数で考えるようになって、比の値と座標の値が同じであると言われても、そう簡単に対処できるものではないだろう。それに、θ も度ではなくラジアンで考えるようにし始めたところなので、習慣を変

えることはなおさら難しい。ただ $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ (90°) の範囲は、直角三角形で考えることができるので、順を追ってみることにしよう。その際、弧度に十分慣れていないことを考慮して度数も併記しておいたが、速やかに弧度に慣れてほしいものである。



さて、$\sin\theta$ は $\dfrac{\text{対辺}}{\text{斜辺}}$ であるから、

$$\theta = \frac{\pi}{6}\ (30^\circ)\ \text{のとき、}\quad y = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

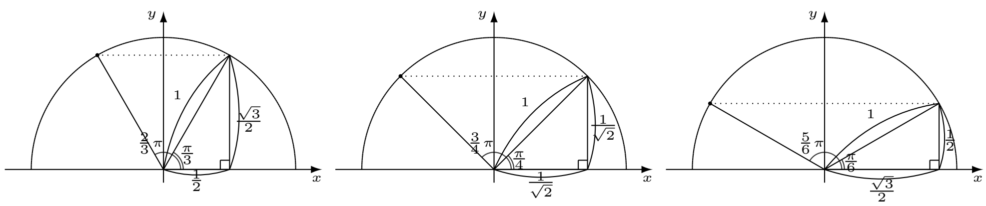
である。同様に、

$$\theta = \frac{\pi}{4}\ (45^\circ)\ \text{のとき、}\quad y = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\theta = \frac{\pi}{3}\ (60^\circ)\ \text{のとき、}\quad y = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

である。

θ が $\dfrac{\pi}{2}$ を超えるときは、半径 1 の円周上を動く点を考えなくてはならない。



$\theta = \dfrac{2}{3}\pi$ のとき、$\sin\theta$ の値は y 座標の値を見ればよかった。このとき y 座標の値は、主角が 60° の直角三角形の対辺の長さに等しい。主角が 60° の直角三角形は、$\dfrac{1}{2}$ に縮小すると半径 1 の円に押し込むことができる。このとき対辺の長さは $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ だから

$$\theta = \frac{2}{3}\pi\ (120^\circ)\ \text{のとき、}\quad y = \sin\frac{2}{3}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

となることが分かる。同様に、

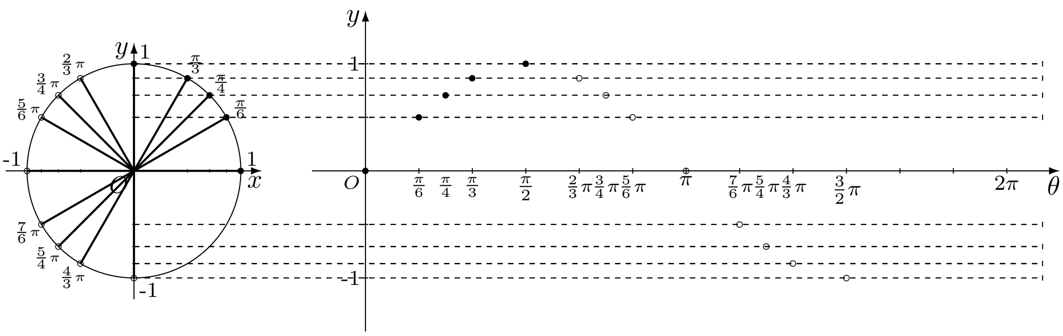
$$\theta = \frac{3}{4}\pi\ (135^\circ)\ \text{のとき、}\quad y = \sin\frac{3}{4}\pi = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\theta = \frac{5}{6}\pi\ (150^\circ)\ \text{のとき、}\quad y = \sin\frac{5}{6}\pi = \frac{1}{2}$$

である。

三角関数 $y=\sin\theta$

さて、このような見方を続けたところで、1 つの角 θ に対する $\sin\theta$ の値を単発で求めただけであって、決して θ に応じた $\sin\theta$ の変化を追っているようには思えないだろう。しかし飛び飛びの値は、延々と続く道の所々に現れる道標のようなものである。道標をたよりに、関数 $y=\sin\theta$ の変化を追ってみよう。



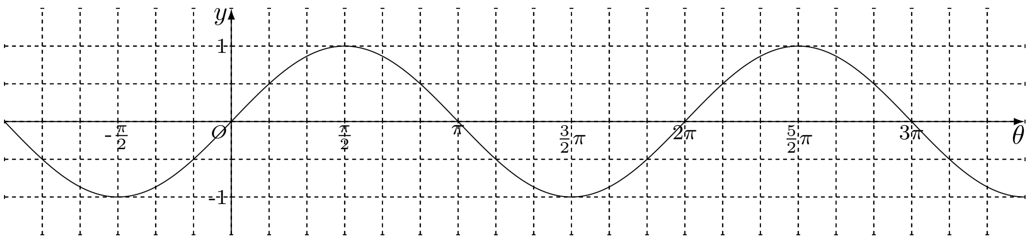
$\theta=0$ のとき $y=\sin\theta=0$ である。これを、横軸 θ、縦軸 y の座標に表すことにすれば、点は原点 $(0,\ 0)$ に打たれる。$\theta=\dfrac{\pi}{6}$ のとき $y=\sin\theta=\dfrac{1}{2}$ である。これも座標に表せば、点は $\left(\frac{\pi}{6},\ \frac{1}{2}\right)$ に打たれる。$\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のときは $y=\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ で、点は $\left(\frac{\pi}{4},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ である。...

このように、円周上の角度 θ に対する $y=\sin\theta$ の値を、θ-y 座標に写していけば、θ と y の関係が見えてくる。グラフは、やはり飛び飛びの点が打たれているだけであるが、単位円において、たとえば θ が $\dfrac{\pi}{6}$ から $\dfrac{\pi}{4}$ へ変化するとき、y の値は単位円の y 軸を上へ伝わるように変化している。これは、この区間では関数が増加していることを意味するので、θ-y 座標においても 2 点間を増加するように変化しているに違いない。もちろん、精密な変化の仕方までは分からないまでも、およそ 2 点間をなめらかにつなぐであろうことは分かる。

つまり、そのような関係にあるのが関数 $y=\sin\theta$ なのである。

$y=\sin\theta$ のグラフ

特定の θ に対する $\sin\theta$ の値を θ-y 座標にとることで、$y=\sin\theta$ の変化がおぼろげながら見えてきた。座標上の点と点の間の値を調べていないが、2 点間の変化は自然に増加または減少することは、単位円周上の変化を見て予想がつけられた。このことによって、飛び飛びの点を補間すると、次のようなグラフが出来上がる。



グラフを描く際に単位円を参照していたことから、$\theta = 2\pi$ までくると元の状態に戻る。また、角度を逆方向に測ってもグラフの変化の様子は変わらない。つまり、$0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ の関係が繰り返されるだけである。すなわち、$y = \sin\theta$ は $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ を 1 つの単位とする**周期関数**である。重箱の隅をつつくようであるが、厳密には $0 \leqq \theta < 2\pi$ が単位の周期関数と言うべきかもしれない。

* * *

これまでは、三角比を関数として見ようとすれば、$x°$ に対する y の値を調べることが自然な行為であった。いまは角度の単位にラジアンを使っているので、θ に対する y の値を調べればよいことになった。どちらも大差ないように思えるかもしれない。しかし、実際は天と地ほどの違いがあるのである。

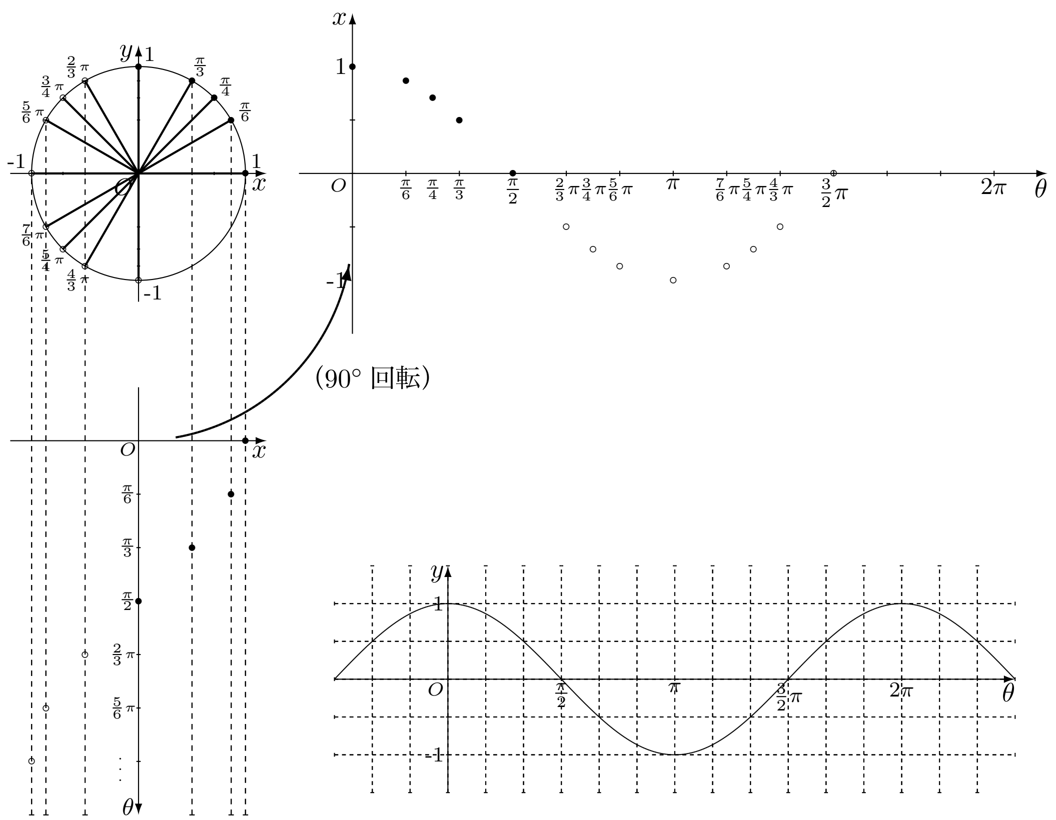
それは、弧度法が一周分の弧に対する比で表されていることに関係している。なぜなら、$y = \sin\theta$ も比の値だからである。つまり、θ に対する y の値は、比に対する比の値を求めていることになるので、どちらも同じ性質を比較していることになる。一方で日常でも使われる角度 ° は、単に 360 までの数値を使っているに過ぎない。これは比ではないので、100 までの数値で表すことにしていたら、たとえば 30 という数値が表す角の大きさ違うものになるのである。

すると、ここに示した θ-y 軸の、θ 軸の 1 目盛と y 軸の 1 目盛の大きさがはたして妥当なのかと問われると、途端にその根拠が怪しくなってしまうのである。ここでは θ 軸の $\dfrac{\pi}{6}$ と y 軸の 0.5 を同じ長さで描いた。$\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{3.1415\cdots}{6} = 0.5235\cdots$ であるから、ほぼ同じ長さであることを根拠にしている。$\dfrac{\pi}{6}$ の値は正確に分かるのだから、きっちりその長さで描けばよいと思われるだろう。実際その通りであるが、軸を描画する私の都合でこのようにしたのである。したがって、正しい比率で $y = \sin\theta$ のグラフを描くなら、θ 軸を 5%ほど伸ばした座標に描くことになる。よって、$y = \sin\theta$ はもう少し間延びした感じの曲線になるだろう。

もっとも、縦と横の比率をきっちりそろえるべきときは、三角関数とその他の関数—たとえば直線や放物線など—を一緒に描くときである。もし、上の座標に $y = x$ を一緒に描いたら、直線の傾きは若干大きく見える。見た目を気にしなければ問題ないことであるが。∎

$x = \cos\theta$ のグラフ

$y = \sin\theta$ と同じように $x = \cos\theta$ の関係を調べてみよう。$\sin\theta$ の値は単位円の y 軸の値を読んでいたので、$\cos\theta$ の値は単位円の x 軸の値を読めばよいことになる。ただ、x 軸の値を読み取って θ-x 座標に写すには、少々工夫をしなくてならない。単位円の y 軸は、そのまま横滑りさせれば θ-y 座標に写せたが、単位円の x 軸は、横滑りでなく縦滑りさせて θ-x 座標に写すのがよい。



したがって、θ-x 座標は単位円の下に縦に置くことになる。これで平行線に沿って cos の値を記入できることになった。ただし、このままでは習慣となった座標軸とは趣（おもむき）が異なるので、90° 回転させて普段通りの位置で見ることにしよう。$y = \sin\theta$ と同様に、点と点をつないだものが $x = \cos\theta$ のグラフである。

ところで、cos は θ と x の関係であるから $x = \cos\theta$ と書いているが、私たちの素直な感覚では、関数は $y =$ (何がし) と書くものであったと思う。そこで、今後は cos についても $y = \cos\theta$ で表すことにし、y は y 座標を表すものではなく、値域を表すものと考えよう。定義域である θ も x に直してもよいのだが、定義域は π を基本単位としていることから、角の意味が強く意識される θ のままがよいかもしれない。そこで $y = \cos\theta$ としてグラフを描いてみれば、$y = \cos\theta$ も $y = \sin\theta$ と同じく、周期 2π の周期関数であることが分かり、また、同じ形の曲線になっていることも一目瞭然である。