数学的帰納法

数列の話題から外れるような気がするかもしれないが、次の等式

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n}$$

が成り立つことを示したい。数列と似たところは、$n=1,2,3,\ldots$ と代入すれば、具体的な値を見ることができる点であろう。実際、

n	左辺	右辺
1	$1-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
2	$1-\frac{1}{2}+\cdots-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$
3	$1-\frac{1}{2}+\cdots-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{6}$
4	$1-\frac{1}{2}+\cdots-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{8}$
5	$1-\frac{1}{2}+\cdots-\frac{1}{10}$	$\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{10}$
$\vdots$		

のような計算をすることになり、$\cdots$ の部分を丁寧に計算すれば、等式が常に成り立っているように見える。しかし、そのように見えるからといって、無限の彼方まで正しいことは証明できない。

このようなときに有効なのが、**数学的帰納法**と呼ばれる証明方法なのである。この等式の証明は後回しにして、まずは数学的帰納法がどんな証明方法かを示すことにしよう。

*　*　*

数学的帰納法が効果を発揮するものには、数列の和に関するものが多い。上で示そうとしている等式もそのたぐいである。さて、数列の和というものは、どこかで一般項にあたる式を示さない限り、仕組みを理解してもらうのは難しい。たとえば

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots-\frac{1}{2n}$$

は、一般項が $a_n=\dfrac{1}{2n}$ のような誤解を招きかねない。これは間違っている。なぜなら、一般項が本当に $\dfrac{1}{2n}$ であるなら、分母が奇数になることはないからだ。左辺の式は、sum 記号を用いて表すならば

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots-\frac{1}{2n}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)$$

なのである。だから、$n=1$ のときは $1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\cdots-\dfrac{1}{2\cdot 1}$ ではなく、sum 記号の意味から $1-\dfrac{1}{2}$ であることが分かる。

また、$\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\dfrac{1}{n+3}+\cdots+\dfrac{1}{2n}$ については、$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$ である。分母にある n は k の変化に無関係であるが、具体的に $n=5$ が与えられると、それは

$$\sum_{k=1}^{5}\frac{1}{5+k}=\frac{1}{5+1}+\frac{1}{5+2}+\cdots+\frac{1}{5+5}$$

となるのである。しかし、別の見方をすれば

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}+\frac{1}{2k}\right)-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

ということが分かるだろうか。さて、この右辺には $\sum$ の性質が使えて

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}+\frac{1}{2k}\right)-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}+\frac{1}{2k}-\frac{1}{k}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)$$

である。なんと、左辺と同じ式ではないか。でも、ここは知らないふりをして通り過ぎよう。いまは違う証明方法をとりたいのだから。▌

簡単な例

そこで、先の例よりも簡潔な等式

$$1+3+5+7+\cdots+(2n-1)=n^2 \quad (※)$$

を、数学的帰納法を用いて証明しよう。もっとも、これは等差数列の和であるから、わざわざ証明などという込み入ったことをする必要はないけれど。

では、数学的帰納法の肝を述べる。数学的帰納法は

I)	$n=1$ のとき、式が正しいことを示す。
II)	**$n=k$ のとき式が正しいと仮定すると、** $n=k+1$ のときも正しいことを示す。

という 2 段構えの証明方法をとる。

そこで（※）の証明であるが、

I) $n=1$ のとき、左辺は 1、右辺は $1^2=1$ であるから、等式は正しい。

II) $n=k$ のとき、等式が正しいと仮定する。すなわち

$$1+3+5+7+\cdots+(2k-1)=k^2$$

が成り立つことを認める。等式は正しいので、ここで両辺に $2k+1$ を加えると

$$1+3+5+7+\cdots+(2k-1)+(2k+1)=k^2+2k+1$$

であるが、左辺は $n=k+1$ のときの式であることに注意しよう。ところで右辺は、$(k+1)^2$ に因数分解できるが、これも $n=k+1$ のときの式になっている。

以上で、$n=k$ と仮定した式から $n=k+1$ の状態の式が成り立つことが導けたことになる。そして、$n=1$ のときは正しいことが示されていた。よって、I), II) よりすべての自然数 n について等式は成り立つ。(証明終)

証明の理屈

なんだかすっきりしないだろう。何しろ、仮定から始めた話なのだから、どう説明しても仮定から抜け出せないような気がすると思われる。もし、説明が II) だけで終わっていたなら、それは仮定の話しかしていないので証明ではない。これが証明として成立するのは、とにもかくにも I) の確認のおかげである。

k のとき正しければ $k+1$ でも正しいということは、k のときが**本当に**正しければ、$k+1$ のときも**本当に**正しいのである。$k=1$ のときは本当に正しい。なぜなら、それは間違いなく確認してあるからだ。だったら $k=2$ のときも本当に正しいのである。

さて、$k=2$ のときは本当に正しい。なぜなら、それはいま確認したからだ。だったら $k=3$ のときも本当に正しいのである。さて、$k=3$ のときは$\ldots$。

どうかな。いつまでたっても正しいことしか出てこないね。そう、だから等式は最初から最後まで正しいのである。

実際の証明

では、改めて

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n}$$

が成り立つことを示そう。

I) $n=1$ のとき、左辺は $1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$、右辺は $\dfrac{1}{2}$ であるから、等式は正しい。

II) $n=k$ のとき、等式が正しいと仮定する。すなわち

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots-\frac{1}{2k}=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{2k}$$

が成り立つとする。

最初、具体的な n の数値を代入して確かめたように、n の値が 1 つ増えると左辺は 2 項分増えることに注意しよう。したがって $\dfrac{1}{2k}$ の先に増える 2 項は $\dfrac{1}{2k+1}-\dfrac{1}{2k+2}$ である。そこで、これを仮定された式の両辺に加えると

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots-\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}$$

であるが、このとき右辺は先頭の $\dfrac{1}{k+1}$ と末尾の $-\dfrac{1}{2k+2}$ が合わさって

$$\frac{1}{k+1}-\frac{1}{2k+2}=\frac{2}{2(k+1)}-\frac{1}{2(k+1)}=\frac{1}{2(k+1)}$$

となるので

$$\text{右辺} = \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \cdots + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2(k+1)}$$

である。これは $n = k+1$ のときの式でを表している。

以上で、$n = k$ と仮定した式から $n = k+1$ の状態の式が成り立つことが導けたことになる。そして、$n = 1$ のときは正しいことが示されていた。よって、I), II) よりすべての自然数 n について等式は成り立つ。（証明終）

不等式の証明

数学的帰納法は不等式の証明にも使える。ただし、不等式は等式より扱いが難しいので、うまい説明をしないと失敗してしまう。たとえば n を 3 以上の自然数とするとき

$$2^n > 2n+1$$

を証明したいとしよう。何となく人工的な式ではあるが、最終的な目標は $n = k+1$ のとき

$$2^{k+1} > 2(k+1)+1$$

であればよい。このように、あらかじめ目標を定めることは、証明において有効である。

n に条件がついているので、$n = 3$ から始めることに注意して証明に取り組もう。

I) $n = 3$ のとき、左辺は 8、右辺は 7 であるから、不等式は正しい。

II) $k \geqq 3$ として、$n = k$ のとき、不等式

$$2^k > 2k+1$$

が成り立つと仮定すると、$n = k+1$ のときの左辺は $2^{k+1} = 2 \cdot 2^k$ であるが、仮定より $2^k > 2k+1$ であった。このことから

$$\begin{aligned} 2^{k+1} &= 2 \cdot 2^k \\ &> 2 \cdot (2k+1) \end{aligned}$$

である。後は、$2(2k+1) \geqq 2(k+1)+1$ を示せばよいのだが、差をとって

$$2(2k+1) - \{2(k+1)+1\} = 2k-1 > 0$$

であることから、$2^{k+1} > 2(k+1)+1$ と言ってよい。

以上で、$n=k$ と仮定した式から $n=k+1$ の状態の式が成り立つことが導けたことになる。そして、$n=1$ のときは正しいことが示されていた。よって、I), II) よりすべての自然数 n について不等式は成り立つ。(証明終)