フィボナッチ数列

これまでに色々な漸化式を扱ってきたが、実は比較的扱いやすいものに絞っていたのである。そろそろ、特徴的な漸化式

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \quad a_1 = 1,\ a_2 = 1 \quad （※）$$

を考えてみたい。実際に数列を列挙すれば

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ \ldots$$

である。漸化式からも分かるように、この数列において次の項を求めるには、直前の 2 項の和を求めればよい。したがって、55 の次の項は $34 + 55 = 89$ となる。

この数列は**フィボナッチ数列**[1]と呼ばれる。フィボナッチ数列の一般項を求めてみよう。

$A_{n+1} = kA_n$ を作る

フィボナッチ数列が $a_{n+2} - a_{n+1} = k(a_{n+1} - a_n)$ の形になってくれればよいのだが、それは無理である。そこで次善の策として、せめて

$$a_{n+2} - q \cdot a_{n+1} = p(a_{n+1} - q \cdot a_n)$$

の形になってくれるとありがたい。なぜなら、余計な係数 q があるものの、添字を 1 つずつ下げていけるからである。そこで、この式を展開して整理すると

$$a_{n+2} = (p + q)a_{n+1} - pq \cdot a_n$$

であるから、（※）との係数比較で $p + q = 1$、$pq = -1$ が分かる。これを満たす p, q は、1 番目の式から $q = 1 - p$ を 2 番目の式に代入して求めてもよいし、もし、**解と係数の関係**について知っていれば、p, q が方程式 $x^2 - (p + q)x + pq = 0$、すなわち $x^2 - x - 1 = 0$ の解であることが分かる。いずれにせよ、2 つの解は

$$p,\ q = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

である。

[1] フィボナッチ (1170 頃–1250 頃) : 本名レオナルド・ダ・ピサ（ピサのレオナルド）。フィボナッチ（ボナッチの息子）は愛称。イタリアの数学者。

運の悪いことに、面倒な値になってしまった。しかし、p, q の値が特定できているので、それを定数と見ながら

$$a_{n+2} - q \cdot a_{n+1} = p(a_{n+1} - q \cdot a_n) \quad \ldots (1)$$

$$a_{n+2} - p \cdot a_{n+1} = q(a_{n+1} - p \cdot a_n) \quad \ldots (2)$$

を使うことにしよう。式が 2 つできるのは、p, q の値のどちらが何であるか決められないからである。

フィボナッチ数列の一般項

(1) 式は、添え数を 1 ずつ減らしながら変形すると

$$\begin{aligned}
a_{n+2} - q \cdot a_{n+1} &= p(a_{n+1} - q \cdot a_n) \\
&= p^2(a_n - q \cdot a_{n-1}) \\
&= p^3(a_{n-1} - q \cdot a_{n-2}) \\
&\vdots \\
&= p^n(a_2 - q \cdot a_1) = p^n(1-q) = p^{n+1} \ \ldots (1')
\end{aligned}$$

となるであろう。最後に $p^n(1-q) = p^{n+1}$ となった部分を不思議に思うかもしれないが、$p+q=1$ であったことを思い出してほしい。$1-q=p$ なのである。同様に (2) 式は

$$a_{n+2} - p \cdot a_{n+1} = q^n(1-p) = q^{n+1} \ \ldots (2')$$

となるであろう。中途半端な 2 つの漸化式が現れただけに見えるが、$(1') - (2')$ をするだけで解決する。その結果は

$$(p-q)a_{n+1} = p^{n+1} - q^{n+1}$$

である。両辺を $p-q$ で割ること、p, q を実際の値に直すこと、そして $n+1$ を n に書き直すことにしよう。p, q の値はどちらがどちらでもかまわないので、$p > q$ として

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$$

が、フィボナッチ数列の一般項である。

さて、式の中に $\sqrt{5}$ が含まれているけれど、本当にこれで 1, 1, 2, 3, 5, ... という数列ができるのだろうか。$n=3$ ぐらいまでは何とか計算できても、その先の確認は難しいだろう。こんなときこそ Microsoft Excel の出番である。

◇	A	B	C	D	E	F
1	n	an	(※ C1)	(※ D1)		
2	1	(※ B2)				
3	2	↓下へコピーする				
4	3	↓				
5	4	↓				
6	5	↓				

※ セルの式
(C1) =(1+SQRT(5))/2
(D1) =(1-SQRT(5))/2
(B2) =1/SQRT(5)*(D1^A2-E1^A2)

C 列と D 列には、$p=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $q=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ を入力しておく。すると、セルには実数値が表示されるかもしれないが、このセルの値を利用した B 列の計算、すなわちフィボナッチ数列は誤差なく表示されるであろう。そして、たしかにこの式がフィボナッチ数列を生成することが分かるのである。

もう少しフィボナッチ数列で

フィボナッチ数列において、階差をとる代わりに、2 項間の比 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ をとってみよう。すると

$$\begin{array}{llllllllll} a_n: & 1 & 1 & 2 & 3 & 5 & 8 & 13 & \cdots \\ b_n: & & \frac{1}{1} & \frac{2}{1} & \frac{3}{2} & \frac{5}{3} & \frac{8}{5} & \frac{13}{8} & \cdots \end{array}$$

となる。分数では数値の実感がわかないので、小数で表しておこう。

$$\{b_n\}=1,\ 2,\ 1.5,\ 1.666\cdots,\ 1.6,\ 1.625,\ \ldots$$

1.6 前後の値になっているようだが、実際はどうなのだろう。先の Excel の表において、C 列に "=B3/B2" を入力して下へコピーすると精確な値が分かるだろう。

しかし、フィボナッチ数列の一般項を手にした今となっては、その値が何であるかを知ることができる。$b_n=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ であるから

$$b_n=\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right\}\Big/\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right\}$$

である。こんな恐ろしい分数はどうやって計算するの？

でも心配は要らない。$n\to\infty$ のことを考えるなら、$\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\to 0$ である。なぜなら、$\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\approx(-0.618033989)^n$ だから。で、結局 $b_n\to\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ なのである。この値は、およそ

1.618033989 だ。ここで詳しく述べることはしないが、$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ は**黄金比**と呼ばれる値である。フィボナッチ数列に黄金比が隠れているのは意外かもしれない。

一般的な 3 項間の漸化式

フィボナッチ数列の一般項を求めた方法から、一般的な 3 項間の漸化式

$$a_{n+2} = p \cdot a_{n+1} + q \cdot a_n$$

の解法が見えてくる。ここでは具体的に

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} + 3a_n, \quad a_1 = 2,\ a_2 = 4 \quad (☆)$$

の一般項を求めてみよう。

まず、（☆）が $a_{n+2} - q \cdot a_{n+1} = p(a_{n+1} - q \cdot a_n)$ の形になればよいのだが、この形を展開した式と（☆）の係数を比較して

$$p + q = 2、\quad pq = -3$$

を求めることができる。p, q は $x^2 - 2x - 3 = 0$ の解であるから、これを解いて $p,\ q = -1,\ 3$ を得る。よって p, q の組み合わせから、2 つの漸化式

$$\begin{aligned} a_{n+2} + a_{n+1} &= 3(a_{n+1} + a_n) \\ a_{n+2} - 3a_{n+1} &= -(a_{n+1} - 3a_n) \end{aligned}$$

が得られた。これらは順次添え数を下げることで

$$\begin{aligned} a_{n+2} + a_{n+1} &= 3(a_{n+1} + a_n) = \quad \cdots \quad = 3^n(a_2 + a_1) = 6 \cdot 3^n \\ a_{n+2} - 3a_{n+1} &= -(a_{n+1} - 3a_n) = \quad \cdots \quad = (-1)^n(a_2 - a_1) = (-1)^n \cdot 2 \end{aligned}$$

となる。上の式から下の式を辺々引いて

$$4a_{n+1} = 6 \cdot 3^n + (-1)^n \cdot 2 \quad \text{すなわち} \quad a_{n+1} = \frac{6 \cdot 3^n + (-1)^n \cdot 2}{4}$$

が求められた。$n+1$ を n に見直して、$6 = 2 \cdot 3$ に注意すると

$$a_n = \frac{2 \cdot 3 \cdot 3^{n-1} + (-1)^{n-1} \cdot 2}{4} = \frac{3^n + (-1)^{n-1}}{2}$$

が求めたかった一般項である。$n = 1, 2, 3, \ldots$ を代入して得られる数列

$$2,\ 4,\ 14,\ 40,\ 122,\ \ldots$$

は、たしかに（☆）の関係を満たしているだろう。