漸化式

等差数列や等比数列に対して、一般項を求める式は導くことができた。それらは非常に有用である。ただ、一般項で表すと数列の本質が見えにくくなるのも事実である。等差数列や等比数列を特徴づけるものは、2 項間の差や比である。それなら

$$a_{n+1} - a_n = d\text{、}\qquad \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$$

と表現する方が、数列 $\{a_n\}$ が何であるかを示しやすいだろう。このように、2 項間—場合によっては 3 項間や 4 項間など—の関係を表した式を**漸化式（ぜんかしき）**という。

しかし漸化式で表したところで、一般項を求めようと思ったなら、それ相応の公式を使えばよいので、漸化式が特別な意味を持つことはない。

では、

$$a_{n+1} - a_n = n^2\text{、}\quad a_1 = 1$$

で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項は何であろうか。漸化式は $a_{n+1} = a_n + n^2$ と同じであるから、$n = 1$, 2, 3, . . . と代入することで

$$a_2 = a_1 + 1^2 = 2,\quad a_3 = a_2 + 2^2 = 6,\quad a_3 = a_2 + 3^2 = 15,\quad \ldots$$

のように、数列の実体を目にすることができるが、これでは一般項を求める助けにはならないのである。

漸化式から一般項へ

では、与えられた漸化式から一般項を求める方法はないだろうか。実は、$a_{n+1} - a_n = n^2$ というのは、階差 $b_n = n^2$ であることを見抜けば a_n を求めるのは容易い。

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} k^2 \\ &= 1 + \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \end{aligned}$$

で十分である。このように、階差が sum 記号で計算できる漸化式は、いままでの知識で対応できる。

そうでないときは、様々な型によって解法が知られているので、いくつか示しておこう。

階差ではなく...

2 項間の差が何らかの定数か式で与えられたときは、いわゆる階差が与えられたことになるので、sum 記号が使えれば比較的解きやすい。では、2 項間の和が何らかの定数か式で与えられたらどうだろう。具体的に

$$a_{n+1} + a_n = 4、\quad a_1 = 1$$

だとしたら。しかし、これは何のことはない。実際に数列を書き並べてみると

$$1,\ 3,\ 1,\ 3,\ 1,\ 3,\ \ldots$$

となるので、

$$a_n = 1\ (n\text{ が奇数})、a_n = 3\ (n\text{ が偶数})$$

と書くか、2 を中心に ± 1 が交互に加えられるので $a_n = 2 + (-1)^n$ と書けばよいだろう。

奇数項と偶数項の階差

与えられた漸化式が

$$a_{n+1} + a_n = n、\quad a_1 = 1$$

であれば少し厄介かもしれない。しかし、$a_{n+1} + a_n = n$ ということは、n を 1 増やした

$$a_{n+2} + a_{n+1} = n + 1$$

が成り立つことでもある。ここから元の式を辺々引いて

$$a_{n+2} - a_n = 1$$

を得るが、これは何を意味するのだろうか。これは 1 項飛びの公差を表している。すなわち、奇数項または偶数項の間の階差をとった漸化式なのである。

いま、漸化式 $a_{n+1} + a_n = n$ について $n = 1$ とすると、$a_2 + a_1 = 1$ と $a_1 = 1$ より $a_2 = 0$ が分かる。したがって、a_n を奇数項の a_{2k-1}、偶数項の a_{2k}（$k = 1, 2, 3, \ldots$）に分けて考えると、数列は

$$\begin{array}{rlllllllllllll}
a_{2k-1}: & 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 & & \ldots & & k & & \ldots \\
a_{2k}: & & 0 & & 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & \ldots & & k-1 & & \ldots
\end{array}$$

となっているはずである。

この一般項を n の式で表せないだろうか。$2k-1=n$ (奇数) とおくと、$k=\dfrac{n+1}{2}$ である。また、$2k=n$ (偶数) とおくと、$k=\dfrac{n}{2}$ である。このことから数列は

$$\begin{array}{lcccccccc} a_{n\ (\text{奇数})}: & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots & \dfrac{n+1}{2} & \ldots \\ a_{n\ (\text{偶数})}: & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & \dfrac{n}{2}-1 & \ldots \end{array}$$

とすればよいことになり、

$$a_n=\begin{cases} \dfrac{n+1}{2} & (n\text{ が奇数}) \\ \dfrac{n}{2}-1 & (n\text{ が偶数}) \end{cases}$$

と書いておけば、n に対する a_n の一般項を表せたことになる。そして、実際の数列 $\{a_n\}$ は

$$1,\ 0,\ 2,\ 1,\ 3,\ 2,\ 4,\ 3,\ 5,\ 4,\ \ldots$$

となるのである。

3 項間の漸化式

2 項間の漸化式の場合は、条件がそろえば一般項を求めることができた。数列は、複雑なものになると 3 項間や 4 項間の漸化式で与えられることもある。たとえば

$$a_{n+2}=3a_{n+1}-2a_n,\quad a_1=2,\ a_2=3 \quad (※)$$

という漸化式が与えられたとしよう。初項と第 2 項が合わせて示されているが、初項だけでは数列が確定しないので当然のことである。

具体的な数列を知りたければ、$n=1,2,3,\ldots$ を順次代入していけばよい。実際、そのようにすると

$$a_3=3a_2-2a_1=3\cdot 3-2\cdot 2=5$$

であるから、a_3 が分かる。根気さえあれば、数列が

$$2,\ 3,\ 5,\ 9,\ 17,\ 33,\ \ldots$$

となることが分かる。

ところで、出来上がった数列をよく見ると、階差が $1,2,4,8,16,\ldots$ であることに気づくかもしれない。そうであれば、階差数列の式を使って一般項を求めることは間違いなくできるのである。

$a_{n+2}-a_{n+1}=k(a_{n+1}-a_n)$ のタイプ

では、漸化式が複雑になってきたら、一度数列を書き並べてから数列の特徴を調べる必要があるのだろうか。2 項間の漸化式で行ったように、漸化式から直接一般項は求められないのだろうか。

実は、（※）はうまくいくのである。それには $3a_{n+1}$ から a_{n+1} だけを左辺に移項して

$$a_{n+2}-a_{n+1}=2a_{n+1}-2a_n=2(a_{n+1}-a_n)$$

とするのがよい。そして、ここで注意したいのは

$$a_{n+2}-a_{n+1}=2(a_{n+1}-a_n) \quad \Rightarrow \quad a_{n+1}-a_n=2(a_n-a_{n-1})$$

という性質である。つまり、いままでも時折利用したことがある、n を 1 ずらした式に直したのである。このことから

$$a_{n+2}-a_{n+1}=2(a_{n+1}-a_n)=2\cdot 2(a_n-a_{n-1})$$

となる。この操作は、最後に a_1 にたどり着くまで繰り返し行えるので

$$\begin{aligned}
a_{n+2}-a_{n+1} &= 2(a_{n+1}-a_n) \\
&= 2\cdot 2(a_n-a_{n-1}) \\
&= 2\cdot 2\cdot 2(a_{n-1}-a_{n-2}) \\
&\ \ \vdots \\
&= 2^n(a_2-a_1) \\
&= 2^n(3-2)=2^n
\end{aligned}$$

である。

ところで、最終的に 2 の指数が n であることは、どこで判断しているのだろう。それは、1 行めから順に見ていき、たとえば 3 行あたりの式

$$\underbrace{2\cdot 2\cdot 2}_{\underline{3}\text{個}}(a_{n-1}-a_{\underline{n-2}})$$

において、掛けられる 2 の個数と a_{n-2} の添字の関係に注目するとよい。添字が 1 減るごとに掛けられる 2 が 1 個増えるので、(2 の個数) + (添字の式) = $n+1$ が常に成り立つ。であれば、最後の a_1 の添字が 1 であることから 2 の個数が n であることを想像するのは難しくないだろう。

さて、ここで分かったのは $a_{n+2} - a_{n+1} = 2^n$、つまり階差が 2^n になっていることである。これは階差数列の式から一般項が分かる典型なので、早速式に当てはめたい。ただし、一般項は a_n で求めたいので、2^n の初項が $a_2 - a_1$ になるように、$a_{n+1} - a^n = 2^{n-1}$ をもとに考えなくてはならない。よって

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^{k-1} = 2 + \frac{1(1-2^{n-1})}{1-2} = 2^{n-1} + 1$$

となるのである。$n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ を代入してみよう。$a_n = 2,\ 3,\ 5,\ \ldots$ となっただろう。