階差数列

私たちが比較的容易に数列の一般項を見つけられるのは、その数列が等差数列や等比数列のときぐらいだろう。なぜなら、次の項を生成するために行われる計算がはっきりそれと分かるのは、加・減・乗・除が行われたときぐらいだからだ。もちろん、次の項のために平方したり平方根をとったりしても比較的分かるだろうが、複雑な計算式で次の項を求めていたら、お手上げである。

しかし、ある条件が満たされている数列の場合は、一般項を求めるための手順が確立されている。条件とは、2 項間の差の関係が特定できる数列である。具体例として

$$\{a_n\} = 1,\ 3,\ 7,\ 13,\ 21,\ 31,\ 43,\ \ldots$$

は、比較的簡単に一般項を求めることができる。$\{a_n\}$ は等差数列でも等比数列でもないが、2 項間の差—**階差**という—をとれば

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
a_n: & 1 & & 3 & & 7 & & 13 & & 21 & & \cdots \\
b_n: & & 2 & & 4 & & 6 & & 8 & & \cdots &
\end{array}$$

のように、**階差数列** b_n が、初項 2、公差 2 の等差数列—すなわち $b_n = 2n$ —であることが分かる。これを手がかりにして、a_n を求めるのである。

階差数列を用いて一般項を求める

階差数列が特定できることの何が有利なのだろうか。数列を一般化して考えることにしよう。

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
a_n: & \boxed{a_1} & & a_2 & & a_3 & & a_4 & & \cdots & & \boxed{a_n} & & \cdots \\
b_n: & & b_1 & & b_2 & & b_3 & & \cdots & & b_{n-1} & & \cdots &
\end{array}$$

数列 $\{a_n\}$ の各項は、たとえば $a_3 = a_2 + b_2$ であるとか、$a_9 = a_8 + b_8$ であることは分かるだろう。なぜなら、$a_n - a_{n-1} = b_{n-1}$ としていたのだから。

しかし、ここで一足飛びに a_1 から a_n を眺めたらどうだろうか。すると a_n は

$$a_n = a_1 + (b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_{n-1})$$

になっていることに気づくはずだ。そう、

$$\boxed{a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k}$$

なのである。つまり、sum 記号がついた b_k が計算できさえすれば、a_n の一般項が求められる。

したがって、最初に提示した数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$\begin{aligned} a_n &= 1+\sum_{k=1}^{n-1}2k && (b_k = 2k \text{ より}) \\ &= 1+2\sum_{k=1}^{n-1}k && (\textstyle\sum \text{の性質}) \\ &= 1+2\cdot\frac{(n-1)n}{2} && (\textstyle\sum \text{の関係式}) \\ &= n^2-n+1 \end{aligned}$$

である。試しに $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$ と代入してみると、ほらね、$1, 3, 7, 13, \ldots$ となったでしょう。

* * *

$b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_{n-1}$ は sum 記号を用いて $\sum_{k=2}^{n} b_{k-1}$ と書いてもよい。$\sum$ の使い方は変幻自在である。ただ、こうすると $b_{k-1} = 2(k-1)$ だから

$$a_n = 1+\sum_{k=2}^{n}2(k-1)$$

である。残念ながら sum 記号にまつわる公式は、下端が $k = 1$、上端が n と決まっている。上端を $n-1$ などに書き換えられるのは、n に $n-1$ を代入しているからである。公式に当てはめるなら、下端は $k = 1$ でなくてはならない。

ところが幸いにもこの場合は、$k = 1$ のとき $b_0 = 2(1-1) = 0$ である。数列 $\{b_{k-1}\}$ には b_0 はないのだが、あっても 0 であれば問題はない。よって

$$a_n = 1+\sum_{k=2}^{n}2(k-1) = 1+\sum_{k=1}^{n}2(k-1)$$

としてもよいのである。実際、これを計算して n^2-n+1 になることを確かめるとよいだろう。∎

階差数列の利用

階差数列 $\{b_n\}$ の式が sum 記号を付けて計算できるならば、数列 $\{a_n\}$ の一般項を求められる。数列 $\{a_n\}$ が

$$10,\ 7,\ 16,\ -11,\ 70,\ -173\ ,\ldots$$

であれば、いかにも不規則な数列と思うだろう。しかし、階差数列 $\{b_n\}$ を考えると、それは -3, 9, -27, 81, -243, $\ldots$ であるから $b_n=(-3)^n$ である。よって、求める a_n は

$$
\begin{aligned}
a_n &= 10+\sum_{k=1}^{n-1}(-3)^k && (b_k=(-3)^k\text{より}) \\
&= 10+\frac{(-3)\{1-(-3)^{n-1}\}}{1-(-3)} && (\text{等比数列の和の式}) \\
&= \frac{37-(-3)^n}{4}
\end{aligned}
$$

という式になる。確認しておこう。$n=1$ のときは $a_1=\dfrac{37-(-3)}{4}=10$、$n=5$ のときは $a_5=\dfrac{37-(-3)^5}{4}=\dfrac{280}{4}=70$、であるから、よいだろう。

* * *

以前、等比数列の和求める式を

$$
\boxed{\sum_{k=1}^{n}a_1r^{k-1}=\frac{a_1(1-r^n)}{1-r} \qquad (※)}
$$

で与えたことを覚えていることと思う。ところで、たったいま階差数列を利用して a_n を求める際には

$$
\sum_{k=1}^{n-1}(-3)^k=\frac{(-3)\{1-(-3)^{n-1}\}}{1-(-3)}
$$

のように計算している。sum 記号の上端の値や、b_k にあたる一般式に若干の違いが見られるので、式が正しく使われているか疑問が湧くのも無理はない。

実は（※）は、等比数列の和を典型的な記述で表しているに過ぎず、等式が表していることは

$$
\boxed{\sum_{k=1}^{\text{項数}}(\text{公比 } r \text{ の一般項})=\frac{\text{初項 }(1-r^{\text{項数}})}{1-r}}
$$

なのである。そのことは $a(1-r^N)$ の因数分解

$$
a(1-r^N)=a(1-r)(1+r+r^2+\cdots+r^{N-1})=(1-r)(a+ar+ar^2+\cdots+ar^{N-1})
$$

から得られる等式

$$
\underbrace{a+ar+ar^2+\cdots+ar^{N-1}}_{\text{初項 } a\text{、公比 } r \text{ の等比数列の } N \text{ 項の和}}=\frac{a(1-r^N)}{1-r}
$$

との比較から明らかであろう。

したがって、$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(-3)^k$ が、初項 -3、公比 -3 の等比数列の $n-1$ 項の和であることから、

$$
\sum_{k=1}^{n-1}(-3)^k=\frac{(-3)\{1-(-3)^{n-1}\}}{1-(-3)}
$$

は、細かいことを考えることなく、当然のことになるのである。∎

第 2 階差まで

$$\begin{array}{lccccccccccccc} a_n: & 1 & & 3 & & 6 & & 12 & & 23 & & 41 & & \cdots \\ b_n: & & 2 & & 3 & & 6 & & 11 & & 18 & & \cdots & \end{array}$$

ここに $\{a_n\}$ の階差 $\{b_n\}$ をとった数列がある。一見したところ、$\{b_n\}$ もそれほど明らかな数列に見えない。しかし、もう一段の階差を求めて

$$\begin{array}{lccccccccccccc} a_n: & 1 & & 3 & & 6 & & 12 & & 23 & & 41 & & \cdots \\ b_n: & & 2 & & 3 & & 6 & & 11 & & 18 & & \cdots & \\ c_n: & & & 1 & & 3 & & 5 & & 7 & & \cdots & & \end{array}$$

とすると、第 2 階差である $\{c_n\}$ が奇数列であることが分かる。このことから

$$\begin{aligned} b_n &= 2+\sum_{k=1}^{n-1}(2k-1) && (c_k=2k-1\text{ より}) \\ &= 2+2\sum_{k=1}^{n-1}k-\sum_{k=1}^{n-1}1 && (\textstyle\sum\text{ の性質}) \\ &= 2+2\cdot\frac{(n-1)n}{2}-(n-1) && (\textstyle\sum\text{ の関係式}) \\ &= n^2-2n+3 \end{aligned}$$

である。よって、$\{a_n\}$ は

$$\begin{aligned} a_n &= 1+\sum_{k=1}^{n-1}(k^2-2k+3) && (\text{上記 } b_n \text{ より}) \\ &= 1+\sum_{k=1}^{n-1}k^2-2\sum_{k=1}^{n-1}k+\sum_{k=1}^{n-1}3 && (\textstyle\sum\text{ の性質}) \\ &= 1+\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}-2\cdot\frac{(n-1)n}{2}+3(n-1) && (\textstyle\sum\text{ の関係式}) \\ &= \frac{2n^3-9n^2+25n-12}{6} \end{aligned}$$

である。$n=1,2,3,\ldots$ で $\{a_n\}=1,3,6,\ldots$ となることを確認してもらいたい。