sum 記号の性質

sum 記号は単に、冗長になりがちな和を簡潔に表すためのものである。そのため、忠実に記述することでいくつかの性質が見えるようになる。たとえば $\{a_k\}$、$\{b_k\}$ を、とくに等差数列や等比数列に限定しない数列としよう。このとき $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ と書けば、それは

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n$$

を表している。$\{b_k\}$ についても同様である。このとき、$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)$ はどうなるだろう。$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)$ が初項を (a_1+b_1) とする数列

$$(a_1+b_1),\ (a_2+b_2),\ (a_3+b_3),\ \ldots,\ (a_n+b_n)$$

の和であることに注意すると

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k) &= (a_1+b_1)+(a_2+b_2)+(a_3+b_3)+\cdots+(a_n+b_n)\\ &= (a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)+(b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n)\\ &= \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k\end{aligned}$$

から分かるように、

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k}$$

が成り立つことが分かる。

また C を定数としたとき、$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} Ca_k$ がどうなるかといえば

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} Ca_k &= Ca_1 + Ca_2 + Ca_3 + \cdots + Ca_n\\ &= C(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)\\ &= C\sum_{k=1}^{n} a_k\end{aligned}$$

から分かるように、

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} Ca_k = C\sum_{k=1}^{n} a_k}$$

が成り立つことも分かる。

特別な関係式

ここで、1 から n までの自然数の和 $1+2+3+\cdots+n$ を考えてみよう。まず、和の式は第 k 項が数 k であることから、sum 記号を用いて

$$1+2+3+\cdots+n=\sum_{k=1}^{n} k$$

と書ける。一方で、和の式に現れる項が、初項 1、公差 1 の等差数列であることに注意すれば、等差数列の和の式より

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{(1+n)n}{2}$$

が分かる。この式から直ちに、1 から 100 までの数の和は $\dfrac{(1+100)\cdot 100}{2}=5050$ と計算できることは注目に値するが、ここではさらに注目できる関係式

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}}$$

が成り立つことを記憶に留めてもらいたい。蛇足ながら、文字式を記述する習慣に従って右辺を書き直している。

なぜ、これがさらに注目できる関係式かというと、たとえば 2 桁の 3 の倍数の和は、sum 記号の性質と合わせて

$$\begin{aligned}12+15+18+\cdots+99 &= \sum_{k=1}^{30}(3k+9)\\ &= 3\sum_{k=1}^{30} k+\sum_{k=1}^{30} 9\\ &= 3\cdot\frac{30(30+1)}{2}+30\cdot 9=1683\end{aligned}$$

のように、数列とは無関係に単に計算問題として扱えるようになるからである。ちなみに、$\displaystyle\sum_{k=1}^{30} 9$ は代入すべき k はないが

$$\sum_{k=1}^{30} 9=\underbrace{9+9+9+\cdots+9}_{30\text{ 項}}$$

とみなしている。このことから、定数 c に対して

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} c=nc}$$

が成り立つ。

派生する関係式

数学では自然数列の和の他に、自然数の 2 乗の和、すなわち

$$1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+n^2$$

の計算をする必要に迫られることがある。実例は後で挙げることにして、いまはこれを n の式にすることを考えよう。これは結局 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2$ を求めることだが、k^2 は等差数列でも等比数列でもない。しかし、ちょっとした工夫で簡単に求められるのである。

まず、$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\{(k+1)^3-k^3\}$ を考える。$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2$ を求めたいのに $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^3$ を利用するのは変なことかもしれないが、とりあえず sum 記号の性質から

$$\sum_{k=1}^{n}\{(k+1)^3-k^3\}=\sum_{k=1}^{n}(3k^2+3k+1)=3\sum_{k=1}^{n}k^2+3\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1 \quad (※)$$

となる。ところで、左辺を sum 記号の性質を無視して、$k=1$ から順に代入すると

$$\sum_{k=1}^{n}\{(k+1)^3-k^3\}=(2^3-1^3)+(3^3-2^3)+(4^3-3^3)+(5^3-4^3)+\cdots+\{(n+1)^3-n^3\}$$

であるから、ほとんどの項が正負違いで消去されて

$$\sum_{k=1}^{n}\{(k+1)^3-k^3\}=(n+1)^3-1^3=n^3+3n^2+3n$$

が成り立つ。したがって（※）は

$$n^3+3n^2+3n=3\sum_{k=1}^{n}k^2+3\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1$$

ということである。これを、特別な関係式や sum 記号の性質に注意しながら、$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2$ について解くと

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}k^2 &= \frac{1}{3}\left\{n^3+3n^2+3n-3\cdot\frac{n(n+1)}{2}-n\right\} && (\textstyle\sum_{k=1}^{n}k^2\text{について解く})\\
&= \frac{1}{3}\cdot\frac{n}{2}\{2n^2+6n+6-3(n+1)-2\} && (\tfrac{n}{2}\text{をくくり出した})\\
&= \frac{n}{6}(2n^2+3n+1) && (\text{整理した})\\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} && (\text{因数分解した})
\end{aligned}$$

となる。よって

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

という関係式も手にすることができた。

＊　＊　＊

ここでの手法を応用すれば、$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3$ を求めるには $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\{(k+1)^4 - k^4\}$ を使えばよいことが分かる。この手法はいくらでも続けられるので、一般の $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^n$ を順次求めることは可能である。しかし、それには $(k+1)^{n+1}$ の展開が伴うので、そう簡単に公式を作るわけにはいかない。受験のためなら、$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3$ まで知っていれば十分なので、必要なら計算してみるとよいだろう。▮

sum 記号であるけれど

sum 記号を使うと冗長になりがちな和の式が簡単になってよい。さらに、いままでに得た関係式が使えるなら、一般項を求めることも楽である。しかし、ときに落とし穴にはまることもある。たとえば

$$\sum_{k=1}^{30} \frac{1}{k(k+1)}$$

を計算することになったとしよう。残念なことに、分母に k を含む場合は公式のようなものがない。仕方ないので

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{30\cdot 31}$$

をまともに計算することになる。うわ、通分すると分母はいくつになるのだろう。

しかし、この場合はうまい方法がある。$\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$ であることを利用しよう。すると

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{30} \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^{30}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)\\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{30} - \frac{1}{31}\right)\end{aligned}$$

であるから、大変好運にも先頭と末尾の分数以外は正負が違うため消えてしまう。要するに

$$\sum_{k=1}^{30} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{31} = \frac{30}{31}$$

である。sum 記号で書いてあるが、実際には sum 記号を使わないで計算をしているのである。

* * *

sum 記号を用いた和の式には、いくつかの公式めいたものがあったのだから、たとえば

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

にも公式みたいなものがあってもよい気がする。しかし、それは無いのである。

公式が無い理由とは別の話になるが、第 n 項で和を打ち切らず、

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$$

のように無限に項を加えたら、何か一定の値になるのだろうか。無限の彼方では $\dfrac{1}{k}$ はほとんど 0 になるだろうから、一定の和を持つように感じる。しかし、それは間違いである。なぜなら

$$\begin{aligned}1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots &= 1+\left(\frac{1}{2}\right)+\underbrace{\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)}_{2\text{ 項}}+\underbrace{\left(\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{8}\right)}_{4\text{ 項}}+\underbrace{\left(\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{16}\right)}_{8\text{ 項}}+\cdots\\ &> 1+\left(\frac{1}{2}\right)+\underbrace{\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)}_{2\text{ 項}}+\underbrace{\left(\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{8}\right)}_{4\text{ 項}}+\underbrace{\left(\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{16}\right)}_{8\text{ 項}}+\cdots\\ &= 1+\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)+\cdots=\infty\end{aligned}$$

のように考えると、和は**無限大**より大きいことになってしまうから、一定の値に**収束**しないのである。

蛇足ながら、$\dfrac{1}{k^2}$ の項を加えるなら

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$$

であることが知られている。▌