等比数列

$$2,\ 6,\ 18,\ 54,\ 162,\ 486,\ 1458,\ \ldots$$

この急激に大きな値になっていく数列は、見て分かる通り初項の 2 に 3 を掛け続けたものである。2 項間が一定の比になる数列は**等比数列**といい、一定の比は**公比**という。

値がこれほど急激に変化するものが実際にあるかと問われれば、むしろ等差数列より自然に目に入る機会が多いと答えるだろう。金利の増え方などは等比数列を利用している。現実的な話は難しくなりがちなので、モデル的な例を考えよう。

等比数列は、初項 a に順次公比である r を掛けていくのであるから

$$\begin{array}{ccccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & \cdots \\ a & ar & ar^2 & ar^3 & ar^4 & ar^5 & \cdots \end{array}$$

の関係から、等差数列同様、添え数の値と r の指数が 1 違いになっていることが分かる。よって

$$\boxed{\text{初項 } a_1\text{、公比 } r \text{ の等比数列の一般項 } a_n \text{ は、} a_n = a_1 r^{n-1}}$$

であるといえる。ここでは、n が 1 から始まることをほのめかすため、初項を a_1 と明示してある。

等比数列の和の式

等比数列の和 S_n を

$$S_n = a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + \cdots + a_1 r^{n-1}$$

と定義して、S_n を a_1 と r の式で表すことを考えよう。等差数列のときは、逆順に書き直した S_n を利用したのだが、この場合はそれでは意味がない。そこで $S_n \times r$ である

$$rS_n = a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + a_1 r^4 + \cdots + a_1 r^n$$

を使うことにする。このようにしてから 2 つの式を辺々引くと、右辺の中央部分は同じ式であるため、すべて消去されて

$$\begin{array}{ccccccccccccc} S_n & = & a_1 & + & a_1 r & + & a_1 r^2 & + & \cdots & + & a_1 r^{n-1} & & \\ rS_n & = & & & a_1 r & + & a_1 r^2 & + & \cdots & + & a_1 r^{n-1} & + & a_1 r^n \\ \hline S_n - rS_n & = & a_1 & & & & & & & & & - & a_1 r^n \end{array}$$

のように簡単な式になる。両辺とも共通因数をくくり出しながら

$$S_n(1-r) = a_1(1-r^n)$$

とした後で、両辺を $1-r$ で割って

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

が得られる。すなわち

$$\boxed{\text{初項 } a_1\text{、公比 } r \text{ の等比数列の第 } n \text{ 項までの和 } S_n \text{ は、} S_n = \dfrac{a_1(1-r^n)}{1-r}}$$

であるといえる。$a_n = a_1 r^{n-1}$ の指数は 1 違いだが、$S_n = \dfrac{a_1(1-r^n)}{1-r}$ の指数は一致していることに注意されたい。

金利の計算

等比数列の和の式は利用価値が高い。かりに、毎年の始めに 1 万円ずつのお金を積み立てることにし、年 1%の金利で 10 年間積み立てることを考えよう。年 1%の金利とは、その年の終わりにお金が 1.01 倍になることとすれば、最初の 1 年が過ぎたとき、1 万円は 1×1.01 万円になっている。この 1 年めに預けた 1 万円は次の年には 1×1.01^2 万円、その次の年には 1×1.01^3 万円となり、10 年めには 1×1.01^{10} 万円になっている。

しかし、2 年めに預けた 1 万円は預ける期間が 9 年間であるから、10 年めの元利合計は 1×1.01^9 万円で打ち止めとなる。同様に、3 年めに預けた 1 万円の 10 年めの元利合計は 1×1.01^8 万円、4 年めに預けた 1 万円の 10 年めの元利合計は 1×1.01^7 万円、... となって、最後の年に預けた 1 万円は 1×1.01 万円である。積み立て総額は

$$1 \times 1.01^{10} + 1 \times 1.01^9 + 1 \times 1.01^8 + \cdots + 1 \times 1.01 \text{ (万円)}$$

となるが、式を右から見れば、これは初項 1×1.01、公比 1.01 の等比数列の和であるから

$$\text{元利合計} = \frac{1 \times 1.01(1-1.01^{10})}{1-1.01} = 10.56683467 \text{ (万円)}$$

を求めることができる。すなわち、1 万円を毎年積み立てた 10 年後の元利合計は 10 万 5668 円となって、5 千円強の利息を手にできることが分かるのである。

sum 記号

金利の計算として等比数列の和を実際に計算した際、計算の手間を惜しんで指数表現のまま式を書いたことを思い出してもらいたい。たとえば、初項 2、公比 3 の等比数列の 10 項分の和なら

$$2+2\cdot 3+2\cdot 3^2+2\cdot 3^3+\cdots+2\cdot 3^9 \quad （※）$$

という式になるが、各項は指数の値以外は皆同じで、どこも $2\cdot 3^k$ の形である。したがって、（※）は

$$2\cdot 3^k \text{の、} k \text{ を } 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 9 \text{ にした項の総和}$$

と言えば、煩わしい式を書く必要がない。そこで、このことを記号化して

$$2+2\cdot 3+2\cdot 3^2+2\cdot 3^3+\cdots+2\cdot 3^9=\sum_{k=0}^{9} 2\cdot 3^k$$

と書くことにしよう[1]。ちなみに $k=0$ のときは $2\cdot 3^0$ を表し、$3^0=1$ である約束から初項の 2 に一致していることに注意したい。また、このような見方に不慣れなら、初項だけ別扱いにして

$$2+2\cdot 3+2\cdot 3^2+2\cdot 3^3+\cdots+2\cdot 3^9=2+\sum_{k=1}^{9} 2\cdot 3^k$$

とすることは一向にかまわない。初項が別扱いとなったので、k には 1 から順に 9 まで代入されることになる。

したがって、等比数列の和の式

$$a_1+a_1r+a_1r^2+a_1r^3+\cdots+a_1r^{n-1}=\frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

は、$\sum$ を用いて書き直すと

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} a_1r^{k-1}=\frac{a_1(1-r^n)}{1-r}}$$

と書けることになる。和の項である一般項は a_1r^{k-1} であるが、k に与える値は 1 から n であることなど、$\sum$（sum 記号）を正確に使うためには細心の注意が要るので、慣れるまでは慎重に使うようにしたい。

*　*　*

数列の和を求めるための記号 $\sum$ は、よく “シグマ記号” と言われる。習慣として広く使われているようだが、細かいことを言えば

和の式を記述するために、記号 $\sum$ を使う

[1] $\sum$ はギリシア文字で、“シグマ” と読む。

のであるから、記号の性質をとらえて "和記号" と言うべきであろう。

このことは、積分を記述するのに "積分記号" を用いることにし、そのために記号 $\int$ を使うことと同じである。私がここで、和記号ではなく sum 記号と書いたのは、煎じ詰めれば積分も和を計算しているので、積分記号も和記号だからである。ちなみに、$\int$ は sum の "s" を縦に引き伸した記号だと言われている。数列の和が離散的であるのに対し、積分の和は連続的であることから、区別してみたかっただけである。別にシグマ記号でもかまわないのである。▮