等差数列の和

数列の振る舞いだけを見ると、それはいかにも人工的で数学だけの理屈に感じることがあるかもしれない。しかし、完璧な等差数列でなくとも、だいたい等差数列になっているものは多い。電気料金や通信料金などは、使用量に依らない基本料金と使用量に応じた従量料金の和であることがある。たとえば基本料金が 1,000 円で、単位時間ごとに 50 円が加算されるならば、t 単位時間使用したことによる料金の総額 M は $M = 1000 + 50t$ で計算できる。整数単位時間ごとに発生する料金を列挙すれば

$$1000,\ 1050,\ 1100,\ 1150,\ 1200,\ \ldots$$

であるから、初項 1000、公差 50 の等差数列である。

さて、この数列の各項の和

$$1000 + 1050 + 1100 + 1150 + 1200 + \cdots$$

を計算してみたい。しかし、使用時間ごとに発生する料金の和を求めることに何の意味があるのだろう。もちろん意味はない。

では、どこかでアルバイトをしている者がいて、最初の月の報酬が 1,000 ドルで、月ごとに 50 ドルが加算されるならば、同じ初項 1000、公差 50 の等差数列の和であっても、たとえば 1 年間の所得額を求めることになるので意味があるだろう。すると、$n = 1$ から始める一般項 a_n は

$$a_n = 1000 + (n-1) \cdot 50 = 50n + 950$$

となる。1 年間の所得を求めるには $n = 12$ のとき、すなわち a_{12} まで知る必要がある。$a_{12} = 1550$ より

$$1000 + 1050 + 1100 + 1150 + 1200 + \cdots + 1550 = 15300$$

を求めることができるのである。

等差数列の和の式

数列の和は、際限なく続く数列をどこかで打ち切らなければ求められない。数列 $\{a_n\}$ の第 n 項までの和を S_n で表すと

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n$$

が計算できればよいことになる。$a_n = a_1 + (n-1)d$ であるから、これは

$$S_n = (a_1) + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \cdots + \{a_1 + (n-1)d\}$$

に書き換えた計算と同じことである。足し算は項を加える順番を逆にしても結果に影響しないので

$$S_n = \{a_1 + (n-1)d\} + \{a_1 + (n-2)d\} + \cdots + (a_1 + d) + (a_1)$$

と書き直してみよう。$a_n = a_1 + (n-1)d$ ならば、その 1 つ前の項 a_{n-1} が $a_{n-1} = a_1 + (n-2)d$ であることに注意してもらいたい。

ここで 2 種類の S_n を辺々加えると

$$\begin{array}{ccccccccc}
S_n & = & a_1 & + & (a_1+d) & + & \cdots & + & \{a_1+(n-1)d\} \\
S_n & = & \{a_1+(n-1)d\} & + & \{a_1+(n-2)d\} & + & \cdots & + & a_1 \\
\hline
2S_n & = & \{2a_1+(n-1)d\} & + & \{2a_1+(n-1)d\} & + & \cdots & + & \{2a_1+(n-1)d\}
\end{array}$$

となる。$2S_n$ における “$\cdots$” のどこもすべて $\{2a_1 + (n-1)d\}$ であることを確認してもらいたい。すると

$$2S_n = \{2a_1 + (n-1)d\} \times n$$

であるから、初項 a_1、公差 d の等差数列の第 n 項までの和 S_n は

$$\boxed{S_n = \frac{\{2a_1 + (n-1)d\}n}{2}}$$

であることが分かる。少々煩わしい式であるが、$a_n = a_1 + (n-1)d$ であることを使えば

$$\boxed{S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}}$$

のように、すっきりした式に書き直せる。この式から、先の 1 年間の所得の計算が

$$S_{12} = \frac{(a_1 + a_{12}) \cdot 12}{2} = \frac{(1000 + 1550) \cdot 12}{2} = 15300$$

のようにも計算できるのである。

* * *

Microsoft Excel を使うと、数列の振る舞いを容易に目にすることができる。

◇	A	B	C	D	E	F
1	n	an	Sn			
2	1	(※ **B2**)	(※ **C2**)			
3	2	↓下へコピーする	↓下へコピーする			
4	3	↓	↓			
5	4	↓	↓			
6	5	↓	↓			

※ セルの式
(**B2**)　=3*A2-1
(**C2**)　=(B2+B2)*A2/2

B 列が $a_n = 3n - 1$ なる等差数列を模している。C 列は a_n までの和 S_n である。図では、B 列と C 列のコピーしか示唆していないが、A–C 列および 2–3 行を範囲選択し、選択範囲右下のポイントを下へドラッグすれば n の値も 1 ずつ増えながらコピーされる。これなら、いくらでも先の様子を見ることができてよい。

もちろん、B 列に入れる式は計算できるものなら何でもよい。この後いろいろな数列が登場するので、適当な式を与えながら成り行きを見るとよいだろう。∎

添字の妙

数列の一般項を表す式、たとえば $a_n = 3n - 1$ は、添字の $_n$ と右辺の n が同時に同じ値を示す。このことは、$f(x) = 3x - 1$ と同じ仕組みであることに気づくだろう。誤解を恐れず言ってしまえば、数列の一般項は関数式と何ら変わるところはない。関数式の変数には、数値だけでなく文字式や関数式が代入できたように、数列の添字にも数値だけでなく文字式を当てはめてよい。

一般項 $a_n = 3n - 1$ は $a_m = 3m - 1$ と書くこともできるし、n を $n + 1$ に変えて

$$a_{n+1} = 3(n + 1) - 1 = 3n + 2$$

とすることもできる。しかし、これは関数式 $f(x) = 3x - 1$ の x を $x + 1$ に変えた、$f(x + 1) = 3x + 2$ とは意味が違うのである。このようなことを関数に対して行うことは、合成関数を求めることである。一方、数列の一般項にこのようなことをすれば、それは第 $n + 1$ 項についての一般項を求めたことになるからである。

具体的に $a_n = 3n - 1$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ からは、数列

$$2,\ 5,\ 8,\ 11,\ 14,\ 17,\ 20,\ 23,\ \ldots$$

が得られ、$a_{n+1} = 3n + 2$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ からは、数列

$$5,\ 8,\ 11,\ 14,\ 17,\ 20,\ 23,\ 26,\ \ldots$$

が得られる。すなわち、a_{n+1} は a_n の 1 項先を忠実に示すのである。

このことは、$a_n = 3n - 1$ で表される数列の第 n 項までの和 S_n についても言える。$a_n = 3n - 1$ ならば

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{\{2 + (3n - 1)\}n}{2} = \frac{3n^2 + n}{2}$$

であるから、S_{n+1} は n を $n + 1$ に変えて

$$S_{n+1} = \frac{3(n + 1)^2 + (n + 1)}{2} = \frac{3n^2 + 7n + 4}{2}$$

と計算できる。実際、S_n が $n=2$ のときは $S_2=\dfrac{3\cdot 2^2+2}{2}=7$ になるのに対し、S_{n+1} が $n=1$ のときは $S_2=\dfrac{3\cdot 1^2+7\cdot 1+4}{2}=7$ となり、いずれも同じ値を示している。

さて、S_n は数列 $\{a_n\}$ の第 n 項までの和、S_{n+1} は数列 $\{a_n\}$ の第 $n+1$ 項までの和であることに注意すると、

$$S_{n+1}=S_n+a_{n+1}$$

が成り立つことになる。これより、数列の和を用いて、数列の一般項 a_{n+1} が $S_{n+1}-S_n$ で求められることが分かる。改めて $n+1$ を n で書き換えると

$$\boxed{a_n=S_n-S_{n-1}\text{（ただし }n\geqq 2\text{）}}$$

という関係式が得られることになる。ここでの話は添え数が 1 から始まることを前提にしているので、ただし書きは $n\geqq 2$ でなくてはならない。