円の媒介変数表示

これまで代表的な 2 次曲線を見てきたが、2 次曲線は定義の仕方が複数あった。たとえば楕円は、2 定点からの距離の和が一定である点の軌跡と見てもよいし、1 直線と 1 定点からの距離の比（離心率 e）が 1 より小さい点の軌跡と見てもよい。また、単に方程式 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ を満たす $(x,\ y)$ の集合でもよい。

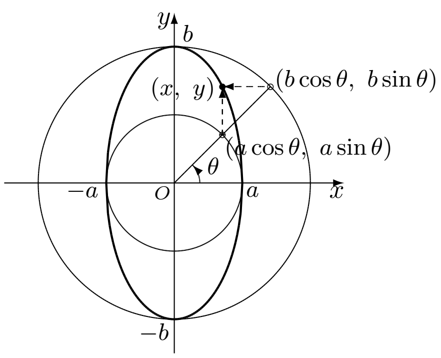
円は楕円の特別な場合だが、円は、2 定点を通る直線が直交するときの交点の軌跡という見方もある。また、x-y 座標に原点を中心とする円を描けば、原点から一定の距離 r にある点を x 座標と y 座標で示すことになる。それはピタゴラスの定理より、$x^2+y^2=r^2$ である。しかし、原点から伸びる長さ r の線分を回転させても円を描くので、x 軸の正の方向からの回転角を θ とすると

$$\begin{cases} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \end{cases}$$

で円を表現できる。x と y を共通の変数 θ で表せている。θ を**媒介変数**といい、このような表現は媒介変数表示と呼ばれる。円の場合、$0 \leqq \theta < 2\pi$ で十分だが、一般に媒介変数もすべての実数を変域にできる。

楕円の媒介変数表示

楕円の媒介変数表示を考えよう。この場合も媒介変数として θ をとるのだが、単に三角関数を用いても円を表すだけである。



楕円は、円を x 軸方向または y 軸方向へ一定数倍の伸縮をほどこしたものである。実際、円 $x^2+y^2=a^2$ に対して $y \to \dfrac{a}{b}y$ へ変換すると楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ が得られる。

図の楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ は、円 $x^2+y^2=a^2$ を y 軸方向へ $\dfrac{b}{a}$ 倍だけ引き伸ばしたものである。同時に、円 $x^2+y^2=b^2$ を x 軸方向へ $\dfrac{a}{b}$ 倍だけ縮めたものでもある。楕円上の任意の点 $(x,\ y)$ は、図から明らかなように、円 $x^2+y^2=a^2$ の x 座標と円 $x^2+y^2=b^2$ の y 座標になっているので

$$\boxed{\begin{cases} x &= a\cos\theta \\ y &= b\sin\theta \end{cases}}$$

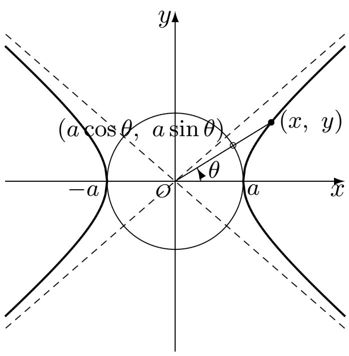
であることが分かる。これが楕円の媒介変数表示である。

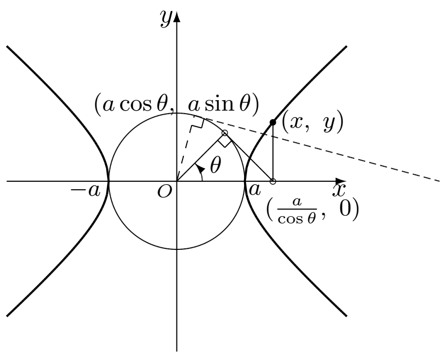
* * *

「楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ は、円 $x^2+y^2=a^2$ を y 軸方向へ $\dfrac{b}{a}$ 倍だけ引き伸ばした」の下りは注意深く読まないと分かりづらいだろう。明確に述べるなら、x、X 等の文字を用いて「楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ は、円 $X^2+Y^2=a^2$ を...」と書くのであった。これなら、$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ は $x^2+\dfrac{a^2}{b^2}y^2=a^2$ だから、この式について $x\to X$、$y\to\dfrac{b}{a}Y$ に置き換わったことが分かる。つまり $y=\dfrac{b}{a}Y$ なのだから、（楕円の）y は（円の）Y を $\dfrac{b}{a}$ 倍にしているのがはっきり見える。▌

双曲線の媒介変数表示

次は双曲線の媒介変数表示である。y 軸対称の双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ の場合、2 個の頂点に接する半径 a の円が存在する。したがって、この円周上を回転する動径を利用して双曲線の任意の点 $(x,\ y)$ が特定できれば、回転角 θ を媒介とした表し方ができるだろう。





ところが動径を単純に介在させるだけでは、左図のように角 θ が漸近線を超えて双曲線を表すことができない。つまり、媒介変数の範囲に制限がかかることになる。それでいけないことはないのだが、θ は円周上を自由に動ける—つまり変域にすべての実数が使える—方がよい。そこで、円周上の接線が x 軸と交わる点を基準に双曲線の軌跡を定めることにする。そうすることで、右図のよ

うに $\theta: 0 \to \dfrac{\pi}{2}$ へ変化すると $x: a \to \infty$ へ変化するので都合がよい。右図より、任意の θ に対する x の値は $\dfrac{a}{\cos\theta}$ であることはすぐ分かる。理由は、正角 θ に対する割線の比、すなわち正割（せいかつ、$\sec\theta := 1/\cos\theta$）の定義だからである。

このように θ と x 座標を関連づければ、そのときの y の取り方で双曲線が描かれる。双曲線を描く動点は、頂点 $(a,\ 0)$ と原点 O との距離の差が一定でなければならないので一意に決まるはずである。つまり、一定値を決めることで b の値が決まる。いま双曲線として $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ を考えたのだから、この方程式において $x = \dfrac{a}{\cos\theta}$ のときの y が求めるものとなる。それは

$$
\begin{aligned}
\frac{(a/\cos\theta)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} &= 1 \\
y^2 &= b^2\left(\frac{1}{\cos^2\theta} - 1\right) = b^2\tan^2\theta \\
y &= \pm b\tan\theta
\end{aligned}
$$

である。結局、双曲線の媒介変数表示は

$$
\boxed{\left\{
\begin{aligned}
x &= \frac{a}{\cos\theta} \\
y &= b\tan\theta
\end{aligned}
\right.}
$$

であることが分かった。

* * *

媒介変数表示は、x-y 座標に図示するときは少し扱いにくいように思える。たとえば双曲線 $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = 1$ であれば、$y = \pm\sqrt{\dfrac{4x^2}{9} - 4}$ に x の値を順次代入することで点を打つことができるが、媒介変数表示は計算の手間が余分に思える。しかし Microsoft Excel は、その限りではない。この例の場合、媒介変数表示は

$$
x = \frac{3}{\cos\theta}、\quad y = 2\tan\theta
$$

であるから、以下のように設定して x, y の範囲を散布図で表示すればよい。

◇	A	B	C	D	E	F
1	θ	χ	y			
2	-1.5	(※ **B2**)	(※ **C2**)			
3	-1.4	↓下へコピーする	↓下へコピーする			
4				⇓下へドラッグする		
5						
6						

※ セルの式
（**B2**） **=3/COS(A2)**
（**C2**） **=2*TAN(A2)**

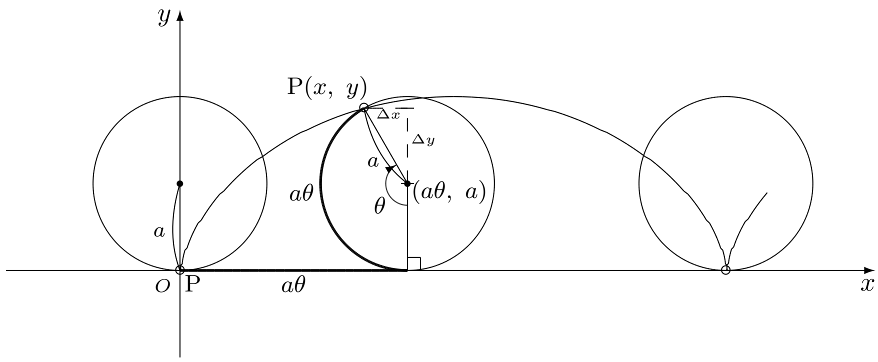
ただし、注意が 2 点ある。1 点目は θ の範囲を $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ にしてグラフを描くことである。なぜなら $\pm\dfrac{\pi}{2}$ を含めた範囲を取ってしまうと、$\tan\theta$ の値が $\pm\infty$ へ向かってしまうので、Excel が自動で作成するグラフの目盛が極端に大きくなってしまう。グラフが表示されないわけではないが、それでは意味がないだろう。

2 点目はグラフを描くための選択範囲に θ の列を含めないことである。散布図は x-y の関連図なので、θ の列（この例では A 列）を含めるとおかしなことになってしまう。▌

サイクロイド

媒介変数表示は何の役に立つのだろうか。実際、楕円や双曲線は媒介変数を用いて方程式を立てることができたが、それらは x, y の関係で示すより分かりやすいとも言えない。むしろ、x-y 座標に図示するには不向きである。しかし、媒介変数で表す方が簡便であったり、x, y で表すことが困難である場合は媒介変数を用いざるを得ない。

ひとつだけ例を挙げよう。路面を自転車が走行するとき、車輪の一点が描く軌跡についてだ。車輪に常夜灯のような発光器をつけた自転車が夜間に走行すると、光が跳ねるように動く様子を観察することはないだろうか。



その軌跡は x-y 座標の関係式で表すより、車輪の回転角を媒介変数として表す方が分かりやすい。原点上にある点 P が回転によって移動するとき、車輪の中心から鉛直下方に下ろした半径からの角を θ ラジアンとする。

車輪の半径が a であるとき、車輪が地面を移動した距離は車輪の角 θ に対する周長、すなわち $a\theta$ に等しい。したがって、車輪の中心は $(a\theta,\ a)$ に移動している。回転により P は、車輪の中心に対して x 軸方向と y 軸方向にそれぞれ Δx、Δy だけずれることになる。どれだけずれるだろうか。

図は回転角が $\dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi$ であるように描いてあるが、図にしたがうと

$$\Delta x = a\sin(\pi - \theta) = a\sin\theta、\quad \Delta y = a\cos(\pi - \theta) = -a\cos\theta$$

であり、いずれも正の値であることに注意されたい。その上で図にしたがって P$(x,\ y)$ の位置を表せば

$$(x,\ y) = (a\theta - a\sin\theta,\ a + (-a\cos\theta)) = (a\theta - a\sin\theta,\ a - a\cos\theta)$$

となることが分かった。以上より、半径 a の車輪上の点が描く軌跡の媒介変数表示は

$$\boxed{\begin{cases} x &= a\theta - a\sin\theta \\ y &= a - a\cos\theta \end{cases}}$$

である。この曲線は**サイクロイド**と呼ばれていて、点が移動する距離—車輪が地面を移動する距離 $a\theta$ のことではない！—が $8a$ であることも知られている。半径 1 の円なら点の移動距離は 8 なのである。円周率と無関係の値になるところが面白い。