1 点と 1 直線からの距離の比が一定

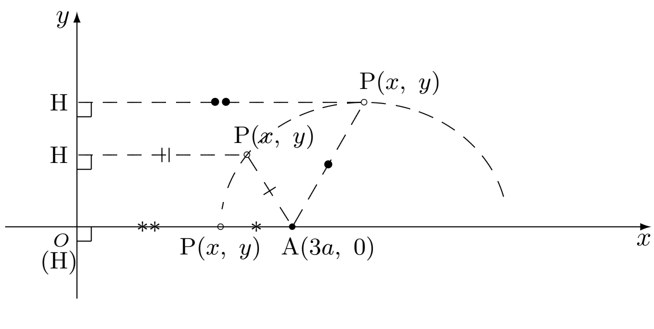
楕円と双曲線は方程式を見る限り近い関係にあるように思える。しかし、図形を比較するとまるで様子が異なる。一方で放物線は楕円や双曲線と比較して、方程式も図形も様子が異なっている。それは、楕円と双曲線は 2 点からの距離の和または差が一定である関係から導かれたものであり、放物線は 1 点と 1 直線からの距離が一定である関係から導かれたものだから、当然かもしれない。

2 次方程式に xy などの項が含まれることで、回転や平行移動が表されることは見てきた。2 次式は $xy,\ x,\ y$ の項を付け足す以上の拡張は考えられないが、他に幅広く考えを巡らせられないだろうか。

放物線をちょっと拡大解釈してみよう。そこで、やや作為的ではあるが、放物線が描かれる条件「1 点と 1 直線からの『距離』が一定」を少し変えて

「1 点と 1 直線からの『距離の比』が一定」

である点の軌跡を調べることにしよう。たとえば、定点 $\mathrm{A}(3a,\ 0)$ からの距離と y 軸からの距離の比が $1:2$ である点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ について考えよう。A の x 座標を $3a$ としたのは、距離の比が $1:2$ であることから、後の計算をちょっとだけ楽にするおまじないである。



では、軌跡の方程式を計算してみよう。P から y 軸に下ろした垂線の足を H とすると、$\mathrm{PA}:\mathrm{PH}=1:2$ であるから、$\sqrt{(x-3a)^2+y^2}:|x|=1:2$ が成り立つ。この等式は

$$
\begin{aligned}
2\sqrt{(x-3a)^2+y^2} &= |x| \qquad (1)\\
3x^2-24ax+36a^2+4y^2 &= 0\\
3\left(x-4a\right)^2+4y^2 &= 12a^2\\
\frac{(x-4a)^2}{4a^2}+\frac{y^2}{3a^2} &= 1
\end{aligned}
$$

のように変形されるので、楕円の方程式が現れることとなった。

＊　＊　＊

距離の比が $1:2$ であることから、定点 A の x 座標を $3a$ とおいた理由が計算の簡略化であることはすでに述べた。このようにおけるのは、もちろん結果を知っているからに他ならない。定点 A の x 座標のおき方は、$\mathrm{A}(p,\ 0)$ とおいたときの関係 $\sqrt{(x-p)^2+y^2}:|x|=m:n\ (m<n)$ を、楕円の標準形に直すことで求められる。計算の最初の部分は省略するが、少し整理すると

$$(n^2-m^2)\left(x-\frac{pn^2}{n^2-m^2}\right)^2+n^2y^2=\frac{p^2n^4}{n^2-m^2}$$

であるから、$p=(n^2-m^2)a$ としておけば $(x-\triangle)^2$ において△が整数になり、最終的に楕円の方程式は

$$\frac{(x-n^2a)^2}{n^2a^2}+\frac{y^2}{(n^2-m^2)a^2}=1$$

になる。したがって $m:n=1:2$ の場合は、定点の x 座標を $p=(2^2-1^2)a=3a$ とおけば、楕円の方程式は $\dfrac{(x-2^2a)^2}{2^2a^2}+\dfrac{y^2}{(2^2-1^2)a^2}=1$ となることが先読みできるのである。▮

放物線・楕円・双曲線を分けるもの

今度は、定点 $\mathrm{A}(3a,\ 0)$ と y 軸からの距離の比が $2:1$ である点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ について考えよう。距離の比を逆にしたものである。しかし、この場合は

$$\sqrt{(x-3a)^2+y^2}=2|x| \tag{2}$$

ということで、同様の計算をすることですぐに

$$\frac{(x+a)^2}{2a^2}-\frac{y^2}{6a^2}=1$$

が分かるので、双曲線であることは間違いない。どうやら比の取り方によって楕円か放物線になるようである。

ところで、(1) と (2) を見比べて分かるように、左辺に掛けられる比の値の方が大きければ移項して整理する際、x^2 と y^2 の係数はともに正になるのに対し、右辺に掛けられる比の値の方が大きければ移項して整理する際、x^2 の係数は正で y^2 の係数は負になることは明白である。

距離の比の値が等しいときは、たとえば $\sqrt{(x-3a)^2+y^2}=|x|$ の方程式からすぐ分かるように、x^2 の項が打ち消しあって x の項と y^2 の項だけになる。つまり、距離の比が等しいときに限り、方程式は放物線を表すのである。

このことから、放物線・楕円・双曲線はすべて 1 点と 1 直線からの距離の比を基準に論じることができ、

動点 P と定点 A との距離を PA、P と直線との距離を PH とすると、

i) $\mathrm{PA} = \mathrm{PH}$ のとき： P の軌跡は放物線

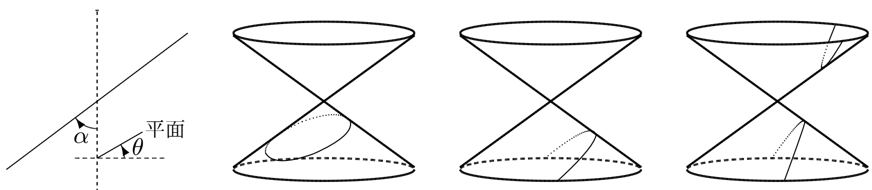
ii) $\mathrm{PA} < \mathrm{PH}$ のとき： P の軌跡は楕円

iii) $\mathrm{PA} > \mathrm{PH}$ のとき： P の軌跡は双曲線

であると、まとめることができる。

* * *

ところで 2 次曲線は、実際は単にひとつの曲線なのである。そのことを如実に教えてくれるのが円錐だ。2 個の円錐を図のように合わせた中に 2 次曲線が現れることが知られている。つまり 2 次曲線とは、2 個の円錐を平面で切ったときの “切り口” の見え方の違いに過ぎない。

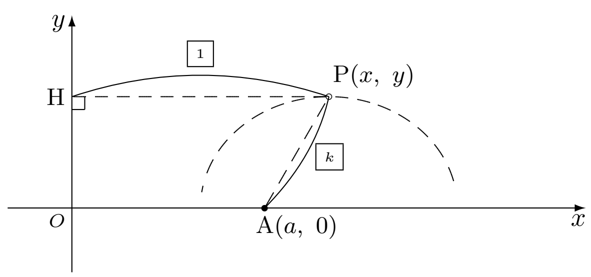


2 個の円錐のことをもう少し正確に言うとそれは、鉛直方向に対して角 α だけ傾けた直線—線分ではない！—を、鉛直軸の周りに回転させてできる図形である。そして、この図形に平面を交差させたときにできる切断面が 2 次曲線になっている。

このとき、$0 \leqq \theta < \alpha$ であれば、平面がどの位置にあっても（円錐の頂点を通らない限り）平面は一方の円錐だけを通過するように横切る。この場合、断面は楕円となる。$\theta = \alpha$ であれば、平面がどの位置にあっても（円錐の母線と重ならない限り）平面は一方の円錐しか横切らず、その平面の半分は円錐を通過することなく内部にとどまる。この場合、断面は放物線となる。$\alpha < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ であれば、平面がどの位置にあっても（円錐の頂点を通らない限り）平面は両方の円錐を横切る。この場合、断面は双曲線となる。2 次曲線は**円錐曲線**なのである。▌

楕円にとっての焦点

ところで距離の比を条件にする場合、定点 A は楕円にとってどのような点であろうか。少し整理して計算し直してみよう。



定点 A$(a,\ 0)$ $(a > 0)$ からの距離と y 軸からの距離の比が $k : 1$ である点 P$(x,\ y)$ を考える。P は楕円を描く前提なので PA $<$ PH より、$0 < k < 1$ であることに注意されたい。すると、この場合の関係 $\sqrt{(x-a)^2+y^2} : |x| = k : 1$ から

$$\begin{aligned}
\sqrt{(x-a)^2+y^2} &= k|x| \qquad (3)\\
(1-k^2)x^2 - 2ax + a^2 + y^2 &= 0\\
(1-k^2)\left\{x - \frac{a}{1-k^2}\right\}^2 + y^2 &= -a^2 + \frac{a^2}{1-k^2} = \frac{k^2a^2}{1-k^2}\\
\frac{\left(x-\frac{a}{1-k^2}\right)^2}{k^2a^2/(1-k^2)^2} + \frac{y^2}{k^2a^2/(1-k^2)} &= 1
\end{aligned}$$

のように変形されるので、x 軸方向へ $\dfrac{a}{1-k^2}$ だけ平行移動した楕円であることが分かる。そして、この楕円の焦点の x 座標を計算すると

$$\sqrt{\frac{k^2a^2}{(1-k^2)^2} - \frac{k^2a^2}{1-k^2}} = \sqrt{\frac{k^2a^2 - k^2a^2(1-k^2)}{(1-k^2)^2}} = \frac{k^2a}{1-k^2}$$

なのだが、これを楕円の x 軸の径（長径もしくは短径）である $\dfrac{ka}{1-k^2}$ と比較すると、ちょうど k 倍となっている。$0 < k < 1$ だったので、焦点の x 座標は x 軸の径より小さい。すなわち焦点は、楕円の軌跡より原点 O 寄りにある。

双曲線にとっての焦点

同じことを双曲線について行ってみよう。と言っても、条件を方程式にすると (3) とまったく同じだ。ただし今度は $k > 1$ となるので、次の行への式変形は

$$(k^2-1)x^2 + 2ax - a^2 - y^2 = 0$$

とする方がよく、その結果方程式は

$$\frac{\left(x-\frac{a}{k^2-1}\right)^2}{k^2a^2/(k^2-1)^2} - \frac{y^2}{k^2a^2/(k^2-1)} = 1$$

となり、明らかに双曲線を表している。そしてここでも、焦点の x 座標 $\dfrac{k^2a}{k^2-1}$ は、楕円なら長径または短径に相当する値の k 倍となっている。$k > 1$ だったので、焦点の x 座標は x 軸の径より大きい。すなわち焦点は、双曲線の軌跡より ∞ 寄りにある。

楕円においても双曲線においても、焦点の x 座標と x 軸の径の比が 2 次曲線を決定づける。それは、$0<k<1$ ならば軌跡は楕円、$k>1$ ならば軌跡は双曲線、$k=1$ なら軌跡は放物線である。このときの k の値を**離心率**と呼ぼう。離心率 k は、楕円を $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ と表したときの $\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ または $\dfrac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}$ に、双曲線を $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=\pm1$ と表したときの $\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$ または $\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}$ に等しい。

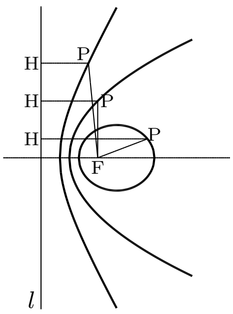
2 次曲線の再定義

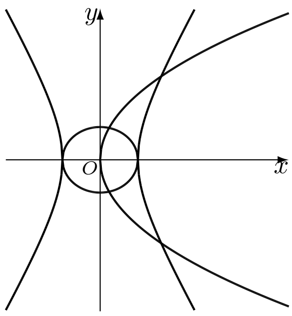
これまでのことをまとめると、2 次曲線は定義を統一できる。定点 F と直線 l が与えられたとき、動点 P と l との距離を PH とする。このとき、$\dfrac{\mathrm{PF}}{\mathrm{PH}}=e$（一定：離心率）となる点 P の軌跡は次のようになる。離心率を e で表すのは "eccentricity" からであろう。

i)	$0<e<1$ のとき：	楕円
ii)	$e=1$ のとき：	放物線
iii)	$1<e$ のとき：	双曲線

であり、F を焦点、l を F に対する準線という。

ただし、上の定義は図形的な表現であるため、x-y 座標で扱うと少々面倒な点もある。





計算をする上では、原点 O と焦点、準線の位置関係は対称である方がよい。そこで方程式を用いて表現すれば次のようになるだろう。

楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ において、焦点 $\mathrm{F}(\pm ae,\ 0)$ に対する準線は $x=\pm\dfrac{a}{e}$

放物線 $x^2=4px$ $(p\neq0)$ において、焦点 $\mathrm{F}(\pm p,\ 0)$ に対する準線は $x=\mp p$

双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a,\,b>0)$ において、焦点 $\mathrm{F}(\pm ae,\ 0)$ に対する準線は $x=\pm\dfrac{a}{e}$

x 座標と y 座標の違いだけなので、楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(b>a>0)$ の焦点・準線と、双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$ $(a,\,b>0)$ の焦点・準線については省いた。