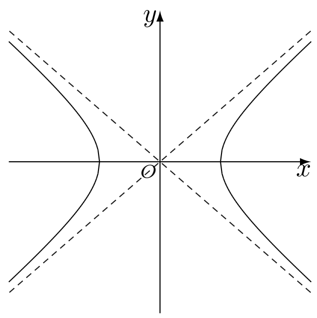
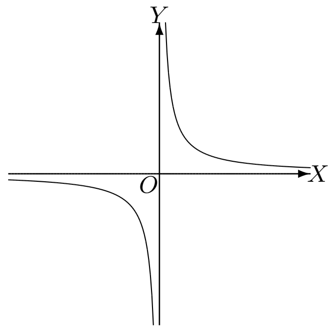
反比例からの軸変換

ところで私たちはとうの昔に双曲線と出会っている。それは反比例のグラフである。実際、方程式 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ は

$$\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=1 \tag{1}$$

である。ここで $\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}=X$、$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=Y$ とおけば上の式は $XY=1$ となる。まさに反比例である。





しかし、$XY=1$ は (1) を単純に回転させたものではない。なぜなら、(1) の漸近線が必ずしも直交しないからである。それでも $a=b$ ならば漸近線が直交するので、軸変換によって (1) を $XY=1$ にできる。

というのは、$X=\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}$、$Y=\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}$ のとき、$a=b$ ならば

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1/a & -1/a \\ 1/a & 1/a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\frac{\sqrt{2}}{a}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

を意味するので、$(X,\ Y)$ は $(x,\ y)$ を $\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転させたものとなる。ちなみに、$\dfrac{\sqrt{2}}{a}$ 倍だけ拡大もされる。

2 次曲線の回転と移動

上の例で見たように、双曲線を表す 2 次方程式は原点を中心として回転した方程式に変換できることが分かる。一般に、点 $(x,\ y)$ が原点を中心に角 θ だけ回転して点 $(X,\ Y)$ に移動する場合、$(x,\ y)\to(X,\ Y)$ の変換は

$$\boxed{\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}$$

である。単純な例で様子を見よう。

方程式 $y^2 = 4x$ は、x 軸を対称軸とする放物線で点 $(1,\ \pm 2)$ を通る。これを原点を中心として x 軸の正の方向に $\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転させれば、y 軸を対称軸とし点 $(\pm 2,\ 1)$ を通る放物線となるであろう。そこで、実際に

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & \sin\frac{\pi}{2} \\ -\sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y \\ -X \end{pmatrix}$$

を $y^2 = 4x$ に代入すると

$$y^2 = 4x \qquad \Rightarrow \qquad (-X)^2 = 4Y \quad \text{すなわち} \quad Y = \frac{X^2}{4}$$

であるから、たしかに中学校時代から馴染みの放物線になったことが分かる。

* * *

蛇足ながら上の行列計算は、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

の結果に $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ を適用したものである。▮

しかし、$\dfrac{\pi}{4}$ の回転だと

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & \sin\frac{\pi}{4} \\ -\sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{2}}Y \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{2}}Y \end{pmatrix}$$

であるから、これを代入して

$$y^2 = 4x \qquad \Rightarrow \qquad \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{2}}Y\right)^2 = 4\left(\frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{2}}Y\right)$$

より、計算を進めて整理すると

$$X^2 - 2XY + Y^2 - 4\sqrt{2}X - 4\sqrt{2}Y = 0$$

となって、はたしてこれが放物線を描くかどうか疑わしい。しかし、間違いなく放物線なのである。

であれば、一般の 2 次曲線は $ax^2 + \tilde{a}x + by^2 + \tilde{b}y + c = 0$ ではなく、本当は

$$ax^2 + kxy + by^2 + cx + dy + e = 0 \tag{2}$$

と考えるのが、よいのだろう。

2 次方程式の標準化

たとえば先の $X^2-2XY+Y^2-4\sqrt{2}X-4\sqrt{2}Y=0$ は放物線であり、

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y \\ \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y \end{pmatrix}$$

であったことから、この X、Y を元の方程式に代入して整理すれば $y^2=4x$ であることは分かる。では、一般の 2 次方程式 (2) を見たとき、何を根拠に放物線であることが分かり、どのような代入で式を整理したらよいのだろうか。

XY の項は元になる 2 次曲線を回転させることで生じる。そこで、$ax^2+by^2+cx+dy$ が $AX^2+KXY+BY^2+CX+DY$ になる過程を検証したいのだが、X、Y の項は平行移動から生じる項なので、一旦除外しておきたい。回転によって $f(x,\ y) \to f(X,\ Y)$ に変換されたなら、逆変換は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

であるから、平行移動に関わる cx, dy の項は除外して

$$\begin{aligned} ax^2+by^2 &= a(X\cos\theta+Y\sin\theta)^2+b(-X\sin\theta+Y\cos\theta)^2 \\ &= (a\cos^2\theta+b\sin^2\theta)X^2+2(a-b)\sin\theta\cos\theta XY+(a\sin^2\theta+b\cos^2\theta)Y^2 \\ &= AX^2+KXY+BY^2 \end{aligned}$$

を考えれば十分だろう。すなわち

$$\begin{cases} A = a\cos^2\theta+b\sin^2\theta = (a-b)\cos^2\theta+b \\ K = 2(a-b)\sin\theta\cos\theta \\ B = a\sin^2\theta+b\cos^2\theta = (a-b)\sin^2\theta+b \end{cases}$$

が成り立っていることになる。ここで、$b\sin^2\theta=b(1-\cos^2\theta)$、$b\cos^2\theta=b(1-\sin^2\theta)$ を用いた。これより $a\neq b$ であれば、1, 3 番目の式で b を移項してから 2 番目の式との比を較べれば

$$\frac{K}{A-b}=\frac{2(a-b)\sin\theta\cos\theta}{(a-b)\cos^2\theta}=2\tan\theta、\qquad \frac{B-b}{K}=\frac{(a-b)\sin^2\theta}{2(a-b)\sin\theta\cos\theta}=\frac{1}{2}\tan\theta$$

となるので、b, $\tan\theta$ を求めることができる。実際、$\dfrac{K}{2(A-b)}=\dfrac{2(B-b)}{K}$ を b についての 2 次方程式とみれば、$b=\dfrac{(A+B)\pm\sqrt{(A-B)^2+K^2}}{2}$ と解くことができる。

すると、1, 3 番目の式を辺々足して得られる $A+B=a+b$ より a も分かり、その結果 θ を特定できるのである。

標準化の実際

それではいくつか 2 次方程式を提示し、その標準形が何の図形だったかを特定してみよう。最初の例は $X^2-6XY+Y^2-8X+8Y+12=0$ である。先の結果から元の 2 次式の y^2 の係数である b が分かる。それは

$$b=\frac{(1+1)\pm\sqrt{(1-1)^2+(-6)^2}}{2}=4,\ -2$$

で、$a=A+B-b$ であったから $(b,\ a)=(4,\ -2)$、$(b,\ a)=(-2,\ 4)$ となる。その結果、どちらの組でも 1 番目の式より $\cos^2\theta=\dfrac{A-b}{a-b}=\dfrac{1}{2}$ となる。同様に、3 番目の式より $\sin^2\theta=\dfrac{B-b}{a-b}=\dfrac{1}{2}$ である。ただし、実際の θ の値は求める必要がない。これより、$(\cos\theta,\ \sin\theta)=\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ が分かればよいからだ。$\sin\theta$ が正の値だけなのは、回転は 0° から 180° の範囲を考えれば十分だからである。このことから

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \pm\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \pm\frac{1}{\sqrt{2}}x-\frac{1}{\sqrt{2}}y \\ \frac{1}{\sqrt{2}}x\pm\frac{1}{\sqrt{2}}y \end{pmatrix}$$

を代入すれば図形の標準形である元の状態が分かる。早速 $X^2-6XY+Y^2-8X+8Y+12=0$ に代入してみよう。

$$\begin{aligned}\left(\pm\tfrac{1}{\sqrt{2}}x-\tfrac{1}{\sqrt{2}}y\right)^2-6\left(\pm\tfrac{1}{\sqrt{2}}x-\tfrac{1}{\sqrt{2}}y\right)\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}x\pm\tfrac{1}{\sqrt{2}}y\right)+\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}x\pm\tfrac{1}{\sqrt{2}}y\right)^2 & \\ -8\left(\pm\tfrac{1}{\sqrt{2}}x-\tfrac{1}{\sqrt{2}}y\right)+8\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}x\pm\tfrac{1}{\sqrt{2}}y\right)+12 &= 0\end{aligned}$$

これは 2 通りの方程式となって

$$\begin{cases} -2x^2+4y^2+8\sqrt{2}y+12=0 & \Rightarrow\quad \dfrac{x^2}{(1/2)}-(y+\sqrt{2})^2=1 \\ 4x^2-2y^2+8\sqrt{2}x+12=0 & \Rightarrow\quad (x+\sqrt{2})^2-\dfrac{y^2}{(1/2)}=-1 \end{cases}$$

のような双曲線であることが分かった。

次の例は $5X^2-4XY+8Y^2-16X-8Y-16=0$ である。計算手順はまったく同じなので、少し端折(はしょ)って書いておこう。まず

$$b=\frac{(5+8)\pm\sqrt{(5-8)^2+(-4)^2}}{2}=9,\ 4\quad\text{より}\quad a=4,\ 9$$

となるから、$(\cos^2\theta,\ \sin^2\theta)=\left(\dfrac{4}{5},\ \dfrac{1}{5}\right)$ または $\left(\dfrac{1}{5},\ \dfrac{4}{5}\right)$ が求められるので

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \pm\frac{2}{\sqrt{5}}x-\frac{1}{\sqrt{5}}y \\ \frac{1}{\sqrt{5}}x\pm\frac{2}{\sqrt{5}}y \end{pmatrix}\quad\text{または}\quad\begin{pmatrix} \pm\frac{1}{\sqrt{5}}x-\frac{2}{\sqrt{5}}y \\ \frac{2}{\sqrt{5}}x\pm\frac{1}{\sqrt{5}}y \end{pmatrix}$$

を代入すればよい。その結果、得られる 2 通りの方程式は

$$\begin{cases} 4x^2+9y^2-8\sqrt{5}x-16=0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{(x-\sqrt{5})^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1 \\ 9x^2+4y^2+8\sqrt{5}y-16=0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{(y+\sqrt{5})^2}{9}=1 \end{cases}$$

のような楕円であることが分かった。

最後は前出の $X^2-2XY+Y^2-4\sqrt{2}X-4\sqrt{2}Y=0$ である。これも

$$b=\frac{(1+1)\pm\sqrt{(1-1)^2+(-2)^2}}{2}=2,\ 0 \quad より \quad a=0,\ 2$$

となるから、$(\cos^2\theta,\ \sin^2\theta)=\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ が求められるので、$(X,\ Y)$ を求めて代入すればよい。ただし、以前は $\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ で計算し $y^2=4x$ を得たが、ここでは $\cos\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ も解のひとつであるから $x^2=-4y$ も求められるのである。

* * *

実際の例を試していくつか疑問も浮かんでいるであろう。ひとつだけ指摘しておきたい。それは、標準化の手順は確立されたとしても、標準化前の方程式を見て図形が何であるかを判別できるかということだ。結論をいえば判別可能だ。標準化時の係数 b を求める式は結果だけを与えたが、途中を書けば

$$b=\frac{(A+B)\pm\sqrt{(A+B)^2+(K^2-4AB)}}{2}$$

である。

あまり踏み込んだ話はしないが、b は一般に 2 個の解を持つ。解の符号の違いで標準形の係数 $a,\,b$ の符号が決まり、その結果、双曲線／楕円／放物線に分かれるのである。b は K^2-4AB の正負によって 2 個の解の符号が変わる。それは

$K^2-4AB>0$ のとき、$(A+B)<\sqrt{(A+B)^2+(K^2-4AB)}$ だから、正の解と負の解

$K^2-4AB<0$ のとき、$(A+B)>\sqrt{(A+B)^2+(K^2-4AB)}$ だから、異なる 2 個の正の解

$K^2-4AB=0$ のとき、$(A+B)=\sqrt{(A+B)^2+(K^2-4AB)}$ だから、一方の解は 0

である。ただ、これはあくまで b の解であるが、実際 a を求めると b と同じ値の組を得る。結局、$a,\,b$ の符号の組み合わせは K^2-4AB の符号に依存する。$a,\,b$ が異なる符号なら 2 次方程式は双曲線を、$a,\,b$ がともに正の値なら 2 次方程式は楕円を、一方が 0 なら 2 次方程式は放物線を表すことから、

$K^2-4AB>0$ のとき、双曲線

$K^2-4AB<0$ のとき、楕円

$K^2-4AB=0$ のとき、放物線

と判別できる。

先のみっつの例ではたしかに $X^2-6XY+Y^2-8X+8Y+12=0$ は $K^2-4AB=36-4>0$ で双曲線、$5X^2-4XY+8Y^2-16X-8Y-16=0$ は $K^2-4AB=16-160<0$ で楕円、$X^2-2XY+Y^2-4\sqrt{2}X-4\sqrt{2}Y=0$ は $K^2-4AB=4-4=0$ で放物線となっていた。▮