2 点からの距離の差が一定

2 次曲線を考える際、方程式の他に点や直線からの距離も考えてきた。1 点と 1 直線からの距離が一定である点の軌跡は放物線であり、2 点からの距離の和が一定である点の軌跡は楕円であった。少し技巧的になるかもしれないが、2 点からの距離の "差" が一定である点の軌跡はどうなるであろうか。

楕円のときと同様、2 定点の座標をそれぞれ $(-c,\ 0)$、$(c,\ 0)$ とし、2 点からの距離の差が一定値 k である点 P の座標を $(x,\ y)$ とおく。すると条件から

$$\left|\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right|=k$$

が成り立つ。根号を含む項を移項した両辺を 2 乗して整理していけば、あとの計算は + と − の違いだけなので、結果だけ示せば十分だろう。それは

$$4(k^2-4c^2)x^2+4k^2y^2=k^2(k^2-4c^2) \tag{1}$$

である。しかし、これは $x,\,y$ に関する 2 次方程式 $Ax^2+By^2=K$ の形であり、楕円の方程式とまったく同じである。「2 点からの距離の差が一定」というのは、楕円の別の表現なのだろうか？

もちろん、そうではない。式の計算だけでは見落としていることがある。楕円の場合、動点 P に対して距離の和を

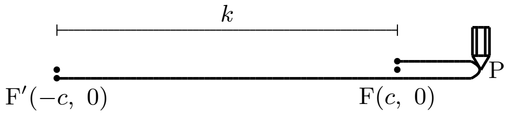
$$\mathrm{PF}+\mathrm{PF'}=k\ (\text{一定})$$

のように保つためには、PF が長くなれば PF′ はその分だけ短くならなければならない。だから値 k を一定の長さの糸に見立て、その途中に P をとるという図形的な見方ができたのである。このことは同時に、2 点 F-F′ の間隔より短い糸は張れないことを意味する。F-F′ 間の距離は $2c$ なので糸の長さ k は $k>2c$ でなければならない。よって、(1) において $k^2-4c^2>0$ は必ず成り立つ。

ところが 2 点からの距離の差を考えた場合、その差を一定に保つ—すなわち

$$|\mathrm{PF}-\mathrm{PF'}|=k\ (\text{一定})$$

のように保つ—ためには、PF が長くなれば PF′ もそれと同じだけ長くならなければならない。



2 点からの距離の差が一定であるとは、少し無理があるが、図形的には 2 点間に張ったゴムひも—つまり伸び縮みする線—を P で引っ張るようなものである。したがって、差 k が 2 点 F-F$'$ 間より長くなることはないので $0 < k < 2c$ である。よって、(1) において $k^2 - 4c^2 < 0$ は必ず成り立つ。つまり、楕円と同じ形の方程式ではあるが、係数の正負が異なるのである。

方程式 (1) から、両辺を $k^2(k^2-4c^2)$ で割って最終的に $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ の形にまとめたものが楕円の方程式であった。しかし、(1) において $4k^2y^2$ の項は正の値であり、2 点からの距離の差が一定の場合は $k^2(k^2-4c^2) < 0$ なのだから、最終的に $\dfrac{y^2}{b^2}$ の項が正の値になっているのはおかしいので、楕円のようにまとめるなら $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ の形にまとめなくてはならい。

ところが、定点を x 軸上ではなく y 軸上にとった場合は

$$\begin{aligned} \left|\sqrt{x^2+(y+c)^2} - \sqrt{x^2+(y-c)^2}\right| &= k \quad \text{より} \\ 4k^2x^2 + 4(k^2-4c^2)y^2 &= k^2(k^2-4c^2) \qquad (2) \end{aligned}$$

が得られる。すると (2) の両辺を $k^2(k^2-4c^2)$ で割ってまとめると、符号の関係から $-\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ の形にまとまる。そこで (2) は両辺に -1 を掛けて $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = -1$ とし、先の結果と一緒にして

$$\boxed{\text{2 点からの距離の差が一定である図形は、} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = \pm 1 \text{ を満たす点 } (x,\ y) \text{ の集合である}}$$

という風にすることが多い。

*　*　*

いま、$0 < k < 2c$ として話を進めたが、実際は $k = 2c$ の場合もあり得る。ただ、そのとき (1)、(2) は結局 $y = 0$、$x = 0$ となってしまう。図形的考察からは、これも 2 点からの距離の差が一定である図形であるが、方程式として 2 次の項を含まないので 2 次曲線と言うのは無理があろう。▮

双曲線

それでは $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = \pm 1$ はどのような図形を描くのだろうか。この場合のグラフも楕円同様、Microsoft Excel で描画すると簡単である。たとえば $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = -1$ の場合、以下のようにすれば楕円のときとまったく同様にグラフが描画できる。

◇	A	B	C	D	E	F
1	x	y	'-y			
2	-6	(※ **B2**)	(※ **C2**)			
3	-5.5	↓下へコピーする	↓下へコピーする			
4				⇓下へドラッグする		
5						
6						

※ セルの式
(B2)　**=SQRT(4*A2*A2/9+4)**
(C2)　**=-B2**

ここで少し数学的な考察をすると、B2 セルの式は $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$ について $y=\pm\sqrt{\dfrac{b^2x^2}{a^2}+b^2}$ を計算している。この式は $y=\pm\dfrac{b}{a}\sqrt{x^2+a^2}$ と変形すると、$x\to\pm\infty$ のとき $x^2+a^2\approx x^2$ と見てよいので、$x\to\pm\infty$ においては $y\approx\pm\dfrac{b}{a}x$ である。このことは、$x\to\pm\infty$ では求める図形は傾き $\pm\dfrac{b}{a}$ の直線で近似されることを示している。しかし、実際に Excel が描く図形を見ると、そう思えないかもしれない。むしろふたつの放物線に見えるのではないだろうか。ここに現れた曲線は**双曲線**という。そして、双曲線が $y=\pm\dfrac{b}{a}x$ に接近するのは、x-y 座標のずっと先の方である。

まったく同じことが $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ についても言えるので、$\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=1$ でも調べてみよう。Excel での描画は以下の通りだ。

◇	A	B	C	D	E	F
1	x	y	'-y			
2	-6	(※ B2)	(※ C2)			
3	-5.5	↓下へコピーする	↓下へコピーする			
4				⇓下へドラッグする		
5						
6						

※ セルの式
(B2) =SQRT(4*A2*A2/9-4)
(C2) =-B2

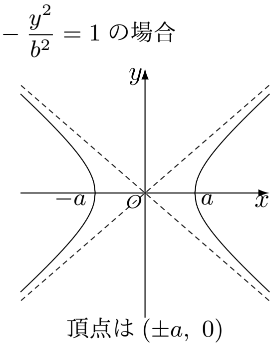
選択した範囲をドラッグした直後にグラフを描画すると少しおかしな図が表示されるはずだ。理由は B, C 列のセルに#NUM!が表示されている部分があるからである。ここは根号内が負になるので y の値がない。そこで、グラフを描画する範囲を、この場合なら x が -6 から -3 までと、x が 3 から 6 までのふたつの範囲に分けて選択することである。その上で散布図を描けばきれいな双曲線が見られるだろう。ただし、「線がある散布図」を選ぶと左右のグラフがつながって表示されるので、この場合は「線がない散布図」がよい。

以上のことをまとめて述べると

$$\boxed{\text{双曲線 } \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=\pm1 \text{ は } y=\pm\dfrac{b}{a}x \text{ を漸近線にもつ}}$$

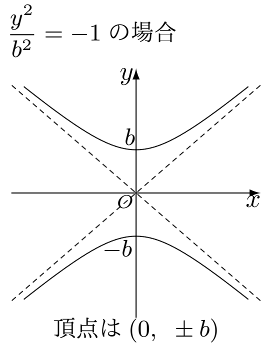
ということである。また、$a,\,b$ は径の長さではないので負の値もとり得るが、$a,\ b>0$ としておく。以下の図を参考にするとよいだろう。

$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ の場合



頂点は $(\pm a,\ 0)$

$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$ の場合



頂点は $(0,\ \pm b)$

双曲線の焦点

ところで、双曲線にも焦点がある。楕円と同じく最初にとった定点がそれである。焦点の x 座標の計算は楕円で行なった計算に準ずるので、ここでは省略したい。ただ、$\dfrac{x^2}{k^2/4}+\dfrac{y^2}{k^2/4-c^2}=1$ を $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ に書き換える際、$\dfrac{k^2}{4}-c^2=-b^2$ と見たはずなので、焦点 $(\pm c,\ 0)$ については

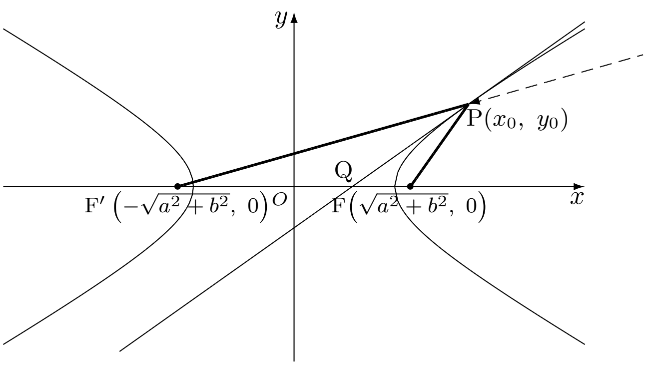
$$c^2=\left(\frac{k^2}{4}\right)^2-\left(\frac{k^2}{4}-c^2\right)=a^2-(-b^2)=a^2+b^2$$

になっていることに注意されたい。すなわち、双曲線の焦点は

$$\boxed{\begin{array}{l}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\text{ のとき、}\left(\pm\sqrt{a^2+b^2},\ 0\right)\\[2mm] \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1\text{ のとき、}\left(0,\ \pm\sqrt{a^2+b^2}\right)\end{array}}$$

である。

さて、その双曲線の焦点なのだが、図を見る限り焦点から出た光線は曲線に遮（さえぎ）られ、もう一方の焦点に届きそうにない。双曲線の焦点は楕円の焦点とは異なる意味があるのだろうか。



双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点 $\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$ を通る接線が x 軸と交わる点を Q とする。P における接線の方程式は

$$\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1$$

である。この式で $y=0$ のときの x の値が Q の x 座標だから、$\mathrm{Q}\left(\dfrac{a^2}{x_0},\ 0\right)$ から

$$\mathrm{FQ}=\sqrt{a^2+b^2}-\frac{a^2}{x_0}\text{、}\qquad \mathrm{F'Q}=\frac{a^2}{x_0}+\sqrt{a^2+b^2}$$

はすぐに分かる。一方、

$$\mathrm{PF}=\sqrt{\left(\sqrt{a^2+b^2}-x_0\right)^2+y_0^2}$$
$$\mathrm{PF'}=\sqrt{\left(-\sqrt{a^2+b^2}-x_0\right)^2+y_0^2}$$

であるが、$\dfrac{x_0^2}{a^2}-\dfrac{y_0^2}{b^2}=1$ より $y_0^2=b^2\left(\dfrac{x_0^2}{a^2}-1\right)$ に注意すると、楕円での計算と同様に

$$\begin{aligned}\mathrm{PF} &= \frac{x_0}{a}\sqrt{a^2+b^2}-a\\ \mathrm{PF'} &= \frac{x_0}{a}\sqrt{a^2+b^2}+a\end{aligned}$$

を求めることができる。すると、楕円での比較と同じように

$$\begin{aligned}\mathrm{PF} &= \frac{x_0}{a}\left(\sqrt{a^2+b^2}-\frac{a^2}{x_0}\right) &= \frac{x_0}{a}\mathrm{FQ}\\ \mathrm{PF'} &= \frac{x_0}{a}\left(\sqrt{a^2+b^2}+\frac{a^2}{x_0}\right) &= \frac{x_0}{a}\mathrm{F'Q}\end{aligned}$$

となっていることが分かる。このことは PQ が $\angle\mathrm{FPF'}$ の二等分線であることを示しているのである。

すると、図において F から出た光線は、P で（反射ではなく）屈折？して F′ へ向かうように見える。だが、そのような見方をするより、F′ を目指してきた光線が F 側の双曲線の内側で反射して焦点 F へ届くと見るのがよいかもしれない。

* * *

双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点 $\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$ における接線の方程式を、とくに説明もなく

$$\boxed{\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1}$$

と示したのは、楕円上の接線を求める場合とほぼ同じ手順で求めることができるからだが、関数 $y=f(x)$ 上の点 $(x_0,\ y_0)$ における接線の方程式が

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$$

であることを知っていれば簡単に求められる。

$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ を x で微分する際、y の式に直してから微分しても構わないが、そのまま両辺を x で微分するのがよい。y が x の関数であることに注意して微分すると

$$\frac{2x}{a^2}-\frac{2yy'}{b^2}=0 \qquad \Rightarrow \qquad y'=\frac{b^2x}{a^2y}$$

であるから、$\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$ における接線の方程式は

$$y-y_0=\frac{b^2x_0}{a^2y_0}(x-x_0)$$

となる。両辺に $\dfrac{y_0}{b^2}$ を掛けて、$\dfrac{x_0^2}{a^2}-\dfrac{y_0^2}{b^2}=1$ に注意すれば公式の出来上がりである。ちなみに、$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$ 上の点 $(x_0,\ y_0)$ における接線の方程式が $\dfrac{x_0x}{a^2}-\dfrac{y_0y}{b^2}=-1$ であることは、容易に想像できるであろう。▮