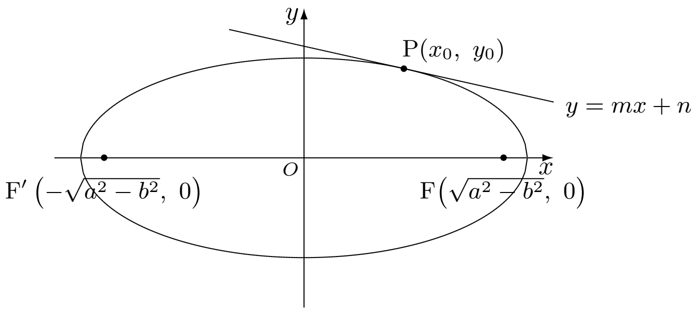
楕円の接線

楕円の標準形として $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ を得ることができた。$a,\ b$ の値によって長径と短径が入れ替わったり焦点の位置が異なるので、一旦、$a>b>0$ であることを前提にしておこう。すると、長径は a、短径は b であり、焦点の座標は $\left(\pm\sqrt{a^2-b^2},\ 0\right)$ である。

まず、焦点に目を向けてみたい。焦点と呼ぶからには放物線の焦点同様、光線が曲線で反射して一点に集まる場所を指すはずである。それを調べるには、曲線上の接線が特定できなくてはならないのは放物線と同じだ。そこで、楕円の接線を求めておきたい。



楕円上の点 $\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$ を通る接線の方程式を $y=mx+n$ とおく。これを楕円の方程式に代入して共有点を求めるならば、接点のみが共有点であることから方程式は重解を持たなければならない。すなわち

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(mx+n)^2}{b^2}=1$$

の判別式の値は 0 である。早速、この式を x について整理しておこう。少々見づらいものの

$$\left(\frac{1}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}\right)x^2+\frac{2mn}{b^2}x+\frac{n^2}{b^2}-1=0$$

である。ここで $D/4=0$ として $m,\ n$ の関係を求めると、分数が多いわりに整理は楽で

$$\begin{aligned}\left(\frac{mn}{b^2}\right)^2-\left(\frac{1}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}\right)\left(\frac{n^2}{b^2}-1\right) &= 0\\ -\frac{n^2}{a^2b^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{m^2}{b^2} &= 0\\ a^2m^2-n^2+b^2 &= 0 \qquad (1)\end{aligned}$$

となる。ところで接線の方程式 $y=mx+n$ は点 $\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$ で接していたのだから、$y_0=mx_0+n$ が成り立つ。$n=y_0-mx_0$ を (1) へ代入して、m について整理すると

$$(a^2-x_0^2)m^2+2x_0y_0m+(b^2-y_0^2)=0 \qquad (2)$$

が得られる。ここで m について解けば求める接線の傾きが分かるのだが、計算は少し工夫した方がよいだろう。

$\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$ は楕円上の点でもあるので $\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}=1$ が成り立っている。そこで、この両辺に a^2 を掛けたり、また b^2 を掛けたりすることで 2 通りの関係式

$$a^2-x_0^2=\frac{a^2y_0^2}{b^2}、\qquad b^2-y_0^2=\frac{b^2x_0^2}{a^2}$$

が得られる。これらを (2) へ代入することで

$$\begin{aligned}\frac{a^2y_0^2}{b^2}m^2+2x_0y_0m+\frac{b^2x_0^2}{a^2}&=0\\ \left(\frac{ay_0}{b}m+\frac{bx_0}{a}\right)^2&=0\\ m&=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}\end{aligned}$$

という風にうまく整理ができ、傾き m の値が特定できるのである。したがって、楕円上の点 $\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$ を通る傾き $m=-\dfrac{b^2x_0}{a^2y_0}$ の接線の方程式は

$$y-y_0=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}(x-x_0)$$

となる。ただし、これではいささか見苦しいので分母を払いつつ整理するのがよい。

$$\begin{aligned}a^2y_0y-a^2y_0^2&=-b^2x_0x+b^2x_0^2\\ a^2y_0y+b^2x_0x&=a^2y_0^2+b^2x_0^2\end{aligned}$$

両辺を a^2b^2 で割って

$$\frac{y_0y}{b^2}+\frac{x_0x}{a^2}=\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{x_0^2}{a^2}$$

ここで、$\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}=1$ であることに注意すると、結局

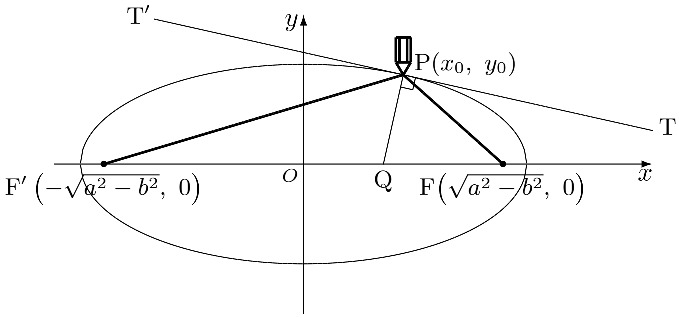
楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点 $\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$ における、 接線の方程式は $\dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}=1$

とするのが公式として覚えやすい形であろう。

楕円の焦点

実際、楕円の焦点は光線が集中する点となっている。ただし、2 点ある焦点の一方から出た光線が楕円上で反射してもう一方の焦点に届く、という点で放物線の焦点とは異なる。つまり、光線は

一方の焦点からどの方向へ出ようとも、必ずもう一方の焦点へ向かう。このことは、2ヶ所をピン留めした糸をぴんと張ったとき、光線が糸に沿って進むことを意味している。



では、そのようになっていることを確認しよう。点 P で楕円に接する接線を TT′ とする。ここで、P から垂線を立てて x 軸まで延ばし、x 軸との交点を Q とする。

楕円を $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$、接点を $\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$ とすると、接線の傾きは $-\dfrac{b^2x_0}{a^2y_0}$ であったから、P における法線、すなわち PQ を通る直線の方程式は

$$y-y_0=\frac{a^2y_0}{b^2x_0}(x-x_0)$$

である。この式で $y=0$ のときの x の値が Q の x 座標だから、$\mathrm{Q}\left(x_0\left(1-\dfrac{b^2}{a^2}\right),\ 0\right)$ はすぐに求められる。したがって

$$\mathrm{FQ}=\sqrt{a^2-b^2}-x_0\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)、\qquad \mathrm{F'Q}=x_0\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)+\sqrt{a^2-b^2}$$

である。一方、

$$\begin{aligned}\mathrm{PF}&=\sqrt{\left(\sqrt{a^2-b^2}-x_0\right)^2+(0-y_0)^2}\\ \mathrm{PF'}&=\sqrt{\left(-\sqrt{a^2-b^2}-x_0\right)^2+(0-y_0)^2}\end{aligned}$$

であるが、$\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}=1$ より $y_0^2=b^2\left(1-\dfrac{x_0^2}{a^2}\right)$ に注意すると

$$\begin{aligned}\mathrm{PF}&=\sqrt{(a^2-b^2)-2x_0\sqrt{a^2-b^2}+x_0^2+b^2-\frac{b^2x_0^2}{a^2}}\\ &=\sqrt{a^2-2x_0\sqrt{a^2-b^2}+\frac{x_0^2}{a^2}(a^2-b^2)}\\ &=\sqrt{\left(a-\frac{x_0}{a}\sqrt{a^2-b^2}\right)^2}\\ &=a-\frac{x_0}{a}\sqrt{a^2-b^2}\quad（※）\end{aligned}$$

と変形できる。PF' も同様に計算できるが、$\mathrm{PF}+\mathrm{PF}'=2a$ であることに注意すれば、ここから

$$\mathrm{PF}' = a + \frac{x_0}{a}\sqrt{a^2-b^2}$$

は即座に分かる。

* * *

PF の計算で根号をはずす際（※）、$\left|a - \frac{x_0}{a}\sqrt{a^2-b^2}\right|$ としなかったのは $a - \frac{x_0}{a}\sqrt{a^2-b^2} > 0$ だからである。なぜなら、a は長径の長さなので楕円上の x 座標の値より大きい。すなわち、$x_0 \leqq a$ であるから $\frac{x_0}{a} \leqq 1$ となる。また $a > \sqrt{a^2-b^2}$ は明らかなため、$\frac{x_0}{a} \leqq 1$ ならば $a - \frac{x_0}{a}\sqrt{a^2-b^2} > 0$ が言えるのである。▮

さて、ここで

$$\begin{aligned}
\mathrm{PF}:\mathrm{FQ} &= a - \frac{x_0}{a}\sqrt{a^2-b^2} : \sqrt{a^2-b^2} - x_0\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right) \\
\mathrm{PF}':\mathrm{F}'\mathrm{Q} &= a + \frac{x_0}{a}\sqrt{a^2-b^2} : \sqrt{a^2-b^2} + x_0\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)
\end{aligned}$$

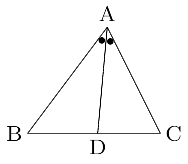
を比較してみよう。一見しただけでは気づきにくいのだが、たとえば FQ の式は

$$\begin{aligned}
\mathrm{FQ} &= \sqrt{a^2-b^2} - x_0\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right) \\
&= \sqrt{a^2-b^2} - \frac{x_0}{a^2}(a^2-b^2) \\
&= \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\left(a - \frac{x_0}{a}\sqrt{a^2-b^2}\right)
\end{aligned}$$

とできるから、$\mathrm{FQ} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\mathrm{PF}$ である。同様に、$\mathrm{F}'\mathrm{Q} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\mathrm{PF}'$ である。すなわち

$$\frac{\mathrm{PF}}{\mathrm{FQ}} = \frac{\mathrm{PF}'}{\mathrm{F}'\mathrm{Q}} \quad \left(= \frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}}\right)$$

となっていることが分かる。このことは PQ が $\angle\mathrm{FPF}'$ の二等分線であることを示しているのである。それは



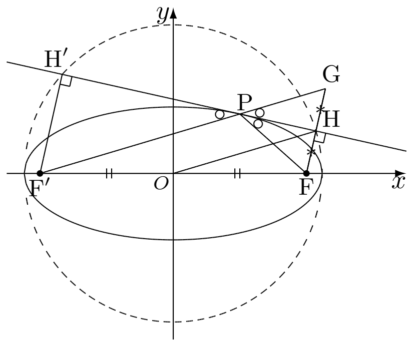
$$\angle\mathrm{BAD} = \angle\mathrm{CAD} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BD}} = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{CD}}$$

が根拠となっている。

すると、図において $\angle\mathrm{FPQ} = \angle\mathrm{F}'\mathrm{PQ}$ であれば、直角の余角に相当する角についても $\angle\mathrm{FPT} = \angle\mathrm{F}'\mathrm{PT}'$ となっている。すなわち、一方の焦点から出た光線は接線 TT' で反射して、もう一方の焦点へ届くのである。

楕円の補助円

楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点 $\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$ における接線の方程式は $\dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}=1$ である。その接線に焦点 F、F′ から垂線を下ろし、垂線の足をそれぞれ H、H′ とすると、H、H′ は楕円の長径を直径とする円周上にある。この円は楕円の**補助円**と呼ばれるもので、楕円を短径方向に引き伸ばしてできる円になっている。そのことを簡単に説明しておこう。示したいことは、図において OH の長さが a であることである。それが示せれば、H は半径 a の円周上にあることが言えるからだ。



まず、F′P の延長と FH の延長が交わる点を G とする。先ほど焦点 F からの光線が P で反射し F′ に届くことを示した通り、$\angle\mathrm{FPH}=\angle\mathrm{F'PH'}$ である。また、対頂角の関係から $\angle\mathrm{GPH}$ も同じ大きさの角である。$\mathrm{PH}\perp\mathrm{FG}$ であったから、結局 PH は $\triangle\mathrm{PFG}$ の垂直二等分線となり、$\mathrm{FH}=\mathrm{GH}$ が言える。さらに、焦点について $\mathrm{FO}=\mathrm{F'O}$ は自明である。これらのことから、$\triangle\mathrm{FGF'}$ において、$\mathrm{OH}=\dfrac{1}{2}\mathrm{F'G}$ が分かった。

ところで、$\mathrm{F'G}=\mathrm{F'P}+\mathrm{PG}$ であるが、$\triangle\mathrm{PFH}\equiv\triangle\mathrm{PGH}$ であったことから $\mathrm{PG}=\mathrm{PF}$。これより $\mathrm{F'G}=\mathrm{F'P}+\mathrm{PF}$ で、F′G は楕円の長径の長さ $2a$ に等しい。よって $\mathrm{OH}=\dfrac{1}{2}\mathrm{F'G}=a$、つまり焦点から楕円の接線上に下ろした垂線の足は、原点 O から常に距離 a のところにある。これは、H が半径 a の円周上にあることを意味している。