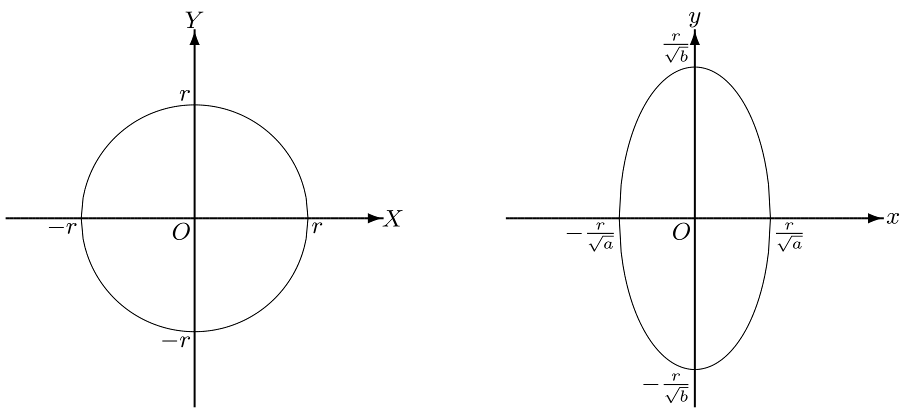
円から楕円へ

円の方程式は一般に $x^2+y^2+lx+my+n=0$ で表される。つまり、x^2 と y^2 の係数は共に 1 である。いま私たちが考えているのは 2 次方程式の一般形なので、実際は x^2 と y^2 の係数は 0 以外の実数をとる。その場合、方程式は何を表すだろうか。

この場合の簡単な例として、$ax^2+by^2=r^2\ (a,\ b>0)$ を考えてみよう。$a:b=1:1$ のときに限りこの方程式は円を表すのだが、もし $x\to\dfrac{X}{\sqrt{a}}$、$y\to\dfrac{Y}{\sqrt{b}}$ とおくと方程式は

$$\begin{aligned} ax^2+by^2 &= r^2 \\ a\left(\frac{X}{\sqrt{a}}\right)^2+b\left(\frac{Y}{\sqrt{b}}\right)^2 &= r^2 \\ X^2+Y^2 &= r^2 \end{aligned}$$

であるから、この変換によって元の方程式は原点を中心とする半径 r の円を表す。ただし、円を描く座標系は X-Y 座標ということである。すると問題は、x-y 座標と X-Y 座標の関係がどうなっているかということである。



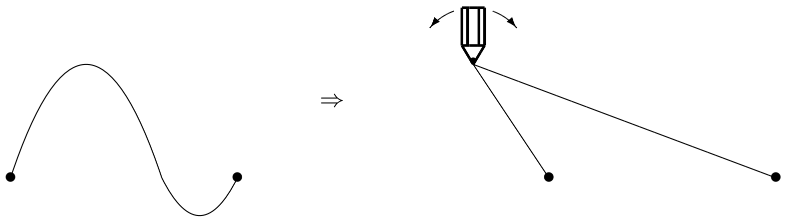
$x=\dfrac{X}{\sqrt{a}}$、$y=\dfrac{Y}{\sqrt{b}}$ とおいたのだから、X 軸上の値 r は x 軸上の値 $\dfrac{r}{\sqrt{a}}$ に、Y 軸上の値 r は y 軸上の値 $\dfrac{r}{\sqrt{b}}$ になる。かりに $\sqrt{a}>1$、$\sqrt{b}<1$ だとしたら、X-Y 座標の図形は x-y 座標において、x 軸方向に縮み、y 軸方向に伸びることになる。つまり、円は楕円に変換されるのである。

2 点からの距離の和が一定

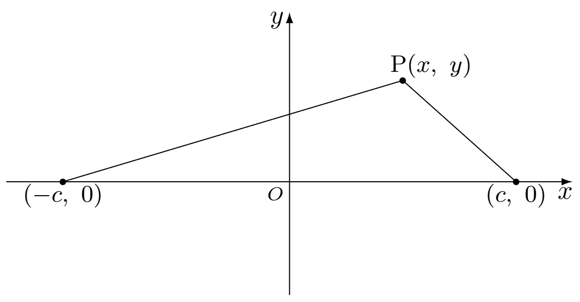
前章で、1 点と 1 直線から等距離にある点の集合が放物線を描くことを見た。1 点と 1 直線から等距離にあるという設定はいささか不自然だったかもしれない。順を追えば、1 点から等距離にあ

る点の集合が円であること、2 点から等距離にある点の集合が 2 点の垂直二等分線であること、の次に考えることだったのだろう。

では、次に考えることは何だろう。少々こじつけになるが、2 点からの “距離の和” が一定である点の集合を考えることにする。



2 点からの距離の和が一定である図形は、ゆるめた糸の 2ヶ所をピン留めして、鉛筆などで糸をぴんと張りながら線を引いてみるとよい。実際にやってみれば楕円が描けることが分かるはずだ。そのことを計算で確かめてみよう。



2 定点の座標をそれぞれ $(-c,\ 0)$、$(c,\ 0)$ とし、2 点からの距離の和が一定値 k である点 P の座標を $(x,\ y)$ とおく。すると条件から

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=k$$

が成り立つ。根号を含む項をひとつ移項し、両辺を 2 乗して整理してみよう。

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2 &= \left(k-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2\\(x+c)^2+y^2 &= k^2-2k\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2\\2k\sqrt{(x-c)^2+y^2} &= k^2-4cx\end{aligned}$$

ここでもう一度両辺を 2 乗して整理すると

$$\begin{aligned}4k^2\{(x-c)^2+y^2\} &= k^4-8k^2cx+16c^2x^2\\4(k^2-4c^2)x^2+4k^2y^2 &= k^2(k^2-4c^2) \qquad (1)\end{aligned}$$

となる。一見複雑に見えるが、これは $x,\ y$ に関する 2 次方程式 $Ax^2+By^2=R$ となっている。すなわち、この形の方程式が楕円を表す方程式なのである。

*　*　*

方程式が表す図形が楕円であることを確認するには、Microsoft Excel が手軽でよい。たとえば $4x^2+9y^2=36$ の場合は、$y=\pm\sqrt{4-\dfrac{4x^2}{9}}$ とした上でワークシートに数式を入力すればよい。

◇	A	B	C	D	E	F
1	x	y	'-y			
2	-3	(※ B2)	(※ C2)			
3	-2.8	↓下へコピーする	↓下へコピーする			
4				⇓下へドラッグする		
5						
6						

※ セルの式
(B2)　=SQRT(4-4*A2*A2/9)
(C2)　=-B2

ひとつの x に対して y は正負 2 通りの値を持つので、x の値と、$y,\ -y$ を求める数式を入力する。ここでは x の値間隔を 0.2 としたが、適宜変えてもらいたい。2–3 行目に必要な数値・式を入力したら、A2:C3 の範囲を選択して右下をドラッグするだけである。この場合は、x の値が 0.2 間隔で結果が表示される。ドラッグ直後は範囲が選択されたままだろうから、そのままメニューから「グラフを挿入」すればよい。グラフの種類は「散布図」が適切で、線がない散布図でも線がある散布図でも似たようなものである。

散布図をながめれば楕円が条件に合う点の “集合” であると実感できるが、糸を張って実際に図を描けば楕円は鉛筆の “軌跡” となっていいる。言葉を厳密に使い分けることはしないので、この単元では点の集合も点の軌跡も同じ意味で用いることにしよう。▮

楕円の標準形

2 次方程式を変形して (1) を得たのだが、式を眺めると思いの外、整っているようだ。両辺を右辺の値で割ってみよう。その際、左辺の係数 4 は分母に組み入れている。

$$\frac{x^2}{k^2/4}+\frac{y^2}{k^2/4-c^2}=1 \tag{2}$$

分母に現れた値は何か意味があるのだろうか。

まず楕円を描く際、糸を y 軸上の正の方向へ張ったときを考えよう。糸は便宜上、長さ k としたので $\mathrm{PA}=\mathrm{PB}=\dfrac{k}{2}$ である。すると三平方の定理より、$\mathrm{PO}=\sqrt{\mathrm{PA}^2-\mathrm{AO}^2}=\sqrt{\dfrac{k^2}{4}-c^2}$ が成り立つ。この値は y^2 の項の分母の平方根に等しい。

また、糸を x 軸上の正の方向へ張ったときは、BQ 上で重なっている糸の長さは AQ' の長さに等しいので、$\mathrm{QQ}'=k$、すなわち $\mathrm{QO}=\dfrac{k}{2}$ である。この値は x^2 の項の分母の平方根に等しい。

これらのことから、(2) の分母の値が円でいうところの半径の 2 乗に相当することが分かる。楕円の場合は半径と言わず、**長径**、**短径**と呼ぶ。したがって楕円においては、一般の 2 次方程式の形で書くより、(2) の形で書いた方が長径と短径の長さがはっきりして分かりやすいと言える。$\dfrac{k^2}{4}\to a^2$、$\dfrac{k^2}{4}-c^2\to b^2$ と読み替えて、改めて (2) を

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ は（長径 | 短径）が（} a \mid b \text{）の楕円である}}$$

と言い直しておこう。これが楕円の標準形と呼ばれる形である。細かいことを付け加えると、a, b は径の長さだから $a,\ b>0$ である。

ところで楕円は、点 A、B を**楕円の焦点**と呼ぶが、(2) を眺めれば焦点の x 座標 c を直ちに求められることが分かる。(2) の分母の値 $\dfrac{k^2}{4}$（$=$ 長径^2）と $\dfrac{k^2}{4}-c^2$（$=$ 短径^2）との差が c^2 であることに注意すると、$c=\sqrt{(\text{長径}^2)-(\text{短径}^2)}$ である。したがって、楕円の焦点 $(\pm c,\ 0)$ は

$$\boxed{\begin{array}{l} a>b \text{ のとき、} \left(\pm\sqrt{a^2-b^2},\ 0\right) \\ a<b \text{ のとき、} \left(0,\ \pm\sqrt{b^2-a^2}\right) \end{array}}$$

となる。当然のことながら、a、b の値が大きい方が長径である。