2 変数の 2 次方程式

私たちは中学校時代から、方程式とグラフの関係を見てきたであろう。とくに、$y = ax$ は比例の関係だとか、$y = ax^2$ は放物線を描く、などである。そのときは、いずれも変数 x と対応する y の関係という視点がまさっていたように思う。一方で、これらをもう少し一般的に

$$ax + by + c = 0 \qquad や \qquad ax^2 + bx + y + c = 0$$

のように見ると、そこには 1 次方程式や 2 次方程式という見方が浮かんでくる。実際、比例のグラフや放物線のグラフは、方程式を満たす $(x,\ y)$ の組を x-y 座標平面に表したものである。つまり 2 変数の、1 次式や 2 次式が特定の解を持つ状況を調べていたことになる。

ところで、2 変数 $x,\, y$ を持つ 1 次式は基本的に $ax + by + c$ しかないが、2 変数の 2 次式なら他にも $ax^2 + \tilde{a}x + by^2 + \tilde{b}y + c$ が思い浮かぶ。放物線を描く 2 次関数は、この 2 次式において $b = 0$、$\tilde{b} = 1$ に限定した方程式のことである。しかし、2 次の方程式をもう少し広い意味でとらえるなら、係数の値は限定されるべきではない。さらに一般化して述べるなら、2 変数の 2 次方程式は $ax^2 + kxy + by^2 + cx + dy + e = 0$ の形まで拡張できるが、この形はしばらく後で扱うことにする。

1 点と 1 直線から等距離にある点の集合

早速、2 次方程式 $ax^2 + \tilde{a}x + by^2 + \tilde{b}y + c = 0$ において、項を限定しながら話を進めたい。手始めに $\tilde{a}x + by^2 = 0$ $(\tilde{a},\ b \neq 0)$ を取り上げよう。ax^2 の項を省いたのは、まず簡単そうな式から片付けるためである。また、$\tilde{b}y$ の項も省いたのは、$\tilde{a}x + by^2 + \tilde{b}y + c = \tilde{a}x + b(y + \tilde{b}/2b)^2 - \tilde{b}^2/4b + c$ と変形すれば、$\tilde{a}x + b\tilde{y}^2 + \tilde{c} = 0$ と同じことだからである。さらに、定数項は 2 次式の本質に影響しないため省いてある。

しかし $\tilde{a}x + by^2 = 0$ は、変数 $x,\, y$ を交換すれば本質的に $y = mx^2$ であるから、中学校で学んだ 2 次関数そのものとなる。であれば、ここで取り上げる意味はないので、少し別の方面から眺めることにしよう。

たとえば、中学校で学んだ図形の単元において、

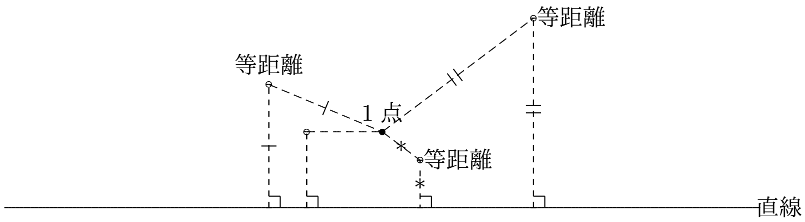
「1 点から等距離にある点の集合」や「2 点から等距離にある点の集合」

などが、それぞれ「1 点を中心とする円」や「2 点を結ぶ線分の垂直二等分線」を表すことは学んでいる。これらは、条件を満たす状況を考えて作図をすることができたのであった。

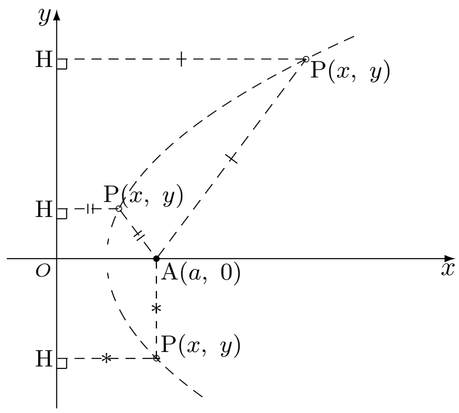
では、いまの例で “1 点” を “1 直線” に変えた

「1 直線から等距離にある点の集合」「1 点と 1 直線から等距離にある点の集合」

は、それぞれ何を表すだろうか。



前者は「1 直線に平行な直線」であることは知っているはずだが、後者はちょっと分かりづらいかもしれない。1 点と 1 直線から等距離にある点の集合が何を表すか調べるには、x-y 座標を用いて計算するのが確かである。



たとえば、1 点を x 軸上の点 $\mathrm{A}(a,\ 0)$ とし 1 直線を y 軸とすれば、点 A と y 軸から等距離にある点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ は、関係式

$$\mathrm{PA} = \sqrt{(x-a)^2 + y^2} = |x| = \mathrm{PH} \tag{1}$$

を満たす。このことは、図を見ればほぼ明らかであろう。点 A と点 P の距離 PA は距離の公式から、また、y 軸と点 P の距離 PH は x 座標に等しい。$|x|$ としたのは、点 A が x 軸の負の側にある場合を考えてのことである。

さて、(1) は両辺を 2 乗して整理すると

$$-2ax + a^2 + y^2 = 0 \qquad \text{より} \qquad x = \frac{1}{2a}y^2 + \frac{a}{2}$$

であるから、文字 x と y の使い方が逆ではあるが 2 次関数の式になっている。2 次関数の式は放物線を描くはずであるから、図中に描き加えておいた。

* * *

いま求めた式は（y は x の）関数になっていない。y が x の関数であるとは、x の値をひとつ決めたとき y の値がただひとつ決まるものをいう。$x=\dfrac{1}{2a}y^2+\dfrac{a}{2}$ では、ひとつの x の値に対して y の値は正負 2 通りとなる。しかし、x は y の関数である。y のひとつの値に対して x の値はひとつに決まるからである。

このように、立場によって関数と呼べたり呼べなかったりするのは煩（わずら）わしい。そこで、いま検討している 2 次の方程式は x と y の関数で捉えるより、方程式を満たす点の集合、すなわち方程式が描く図形に着目して 2 次曲線と総称しておこう。そしてこの場合は放物線を描くのだが、これは 2 次曲線のひとつである。∎

放物線の標準形

さっき、2 次曲線としての放物線を $x=\dfrac{1}{2a}y^2+\dfrac{a}{2}$ と求めたところであるが、この式は x 軸上の点 $(a,\ 0)$ と y 軸からの距離が等しいという条件から求められたのであった。2 次関数の基本形は $y=ax^2$ と簡略化されるのが常だったと思う。そこで前出の式も、基本形は $x=\tilde{a}y^2$ とするのがよい。すなわち基本形の放物線は原点を通るものとする。

放物線が原点を通るためには図や式から明らかなように、放物線を x 軸の負の方向に $\dfrac{a}{2}$ だけ平行移動すればよい。しかし、放物線は y 軸と点 $(a,\ 0)$ から等距離にあったはずなので、平行移動した放物線 $x=\dfrac{1}{2a}y^2$ は直線 $x=-\dfrac{a}{2}$ と点 $\left(\dfrac{a}{2},\ 0\right)$ から等距離にあることになる。このことから

$$\text{直線 } x=-\frac{a}{2} \text{ と点 } \left(\frac{a}{2},\ 0\right) \text{ から等距離にある点の集合は、放物線 } x=\frac{1}{2a}y^2 \text{ である}$$

と言える。ただ、このままの表現では分数が少々目に障（さわ）る。a は任意の値なので $a\to 2p$ と置き換えよう。その上で分母を払う形で書き直して

$$\boxed{\text{放物線 } y^2=4px}$$

とするのがすっきりしている。これを放物線の**標準形**と呼ぶことにする。

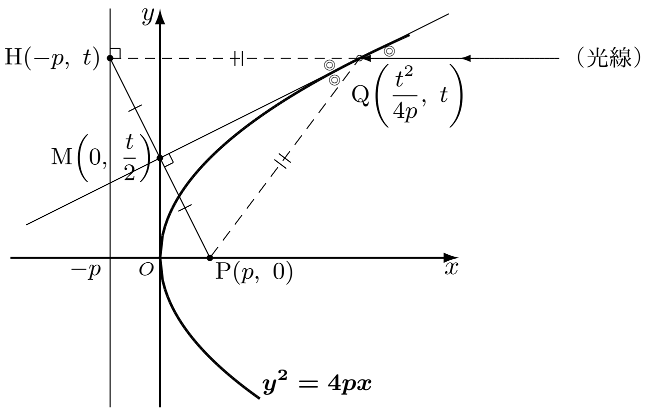
また $a\to 2p$ と置き換えたことで、放物線 $y^2=4px$ は直線 $x=-p$ と点 $(p,\ 0)$ から等距離にあることになるので、放物線は必ず直線 $x=-p$ と定点 $(p,\ 0)$ を従えることとなった。このとき

$$\boxed{\text{放物線 } y^2=4px \text{ の\textbf{準線}は直線 } x=-p\text{、\textbf{焦点}は点 } (p,\ 0)}$$

であるという。

放物線の焦点

放物線における焦点は、光を集める焦点そのものである。小学生の頃、ルーペを使って太陽光を集め、紙に焦げ穴を開けた経験をした人もいるかもしれない。実は放物線も太陽光などの平行な線の束（たば）を1点に集める性質がある。



図は込み入ってしまったが説明を試みよう。まず、一般の放物線 $y^2 = 4px$ 上の任意の点を Q$\left(\dfrac{t^2}{4p},\ t\right)$ とおく。このおき方に違和感を覚えるかも知れないが、先に y 座標の値を t に決めてから x 座標の値を特定したものである。$y^2 = 4px$ は、x が y の関数であるから先に y の値をひとつ決めるのが自然だろう。放物線上の点は準線と焦点から等距離にあるので、準線上の垂線の足は H$(-p,\ t)$、焦点は P$(p,\ 0)$ とおける。

このとき HP の中点は M$\left(0,\ \dfrac{t}{2}\right)$ であるが、HP の傾き $-\dfrac{t}{2p}$ に対し MQ の傾きは $\dfrac{t-\frac{t}{2}}{\frac{t^2}{4p}-0} = \dfrac{2p}{t}$ なので、傾きの積が $\left(-\dfrac{t}{2p}\right)\left(\dfrac{2p}{t}\right) = -1$ であることより、MQ は HP の垂直二等分線であることが分かる。したがって、$\angle \mathrm{HQM} = \angle \mathrm{PQM}$ (= ◎) である。

一方、点 Q、つまり $y = t$ における放物線の接線の傾きを調べると、

$$y^2 = 4px \quad \Rightarrow \quad 2yy' = 4p \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{2p}{y} \quad \Rightarrow \quad y'_{[y=t]} = \frac{2p}{t}$$

なので、MQ は放物線の接線でもある。このことから、x 軸に平行な光線が放物線に当たると、その入射角は対頂角である $\angle$HQM に等しく、かつ同じ大きさの反射角 $\angle$PQM となって点 P へ向かう。Q は任意の点であるから、放物線上のすべての点は x 軸に平行に入ってきた光線を P へ反射させることになる。すなわち P が焦点である。

* * *

MQ が放物線の接線であることを確かめたのは、MQ が $\angle$HQP を二等分しているという理由だけでは光線が Q→P へ向かうとは言えないからである。図を見る限り、（$\angle$HQP の二等分線である）MQ の延長と光線

がつくる角は、MQ と QP がつくる角に等しく、正しく焦点まで導かれているように見える。しかし、実際に光線が反射する際の入射角と反射角は、平面（まっすぐな線）に対してのものである。放物線がつくる放物面は曲がっているが、光は曲がった面に対しても反射する。そして、反射の仕方は曲面に接する平面と同じである。よって、MQ が放物線の接線でないと光線はあらぬ方向へ反射してしまい、1 点 P に集中するとは言えないのである。

放物線の性質を利用したもののひとつがパラボラアンテナである。パラボラアンテナのお椀型の面は放物線を軸の周りに回転させた形をしているため、平行線とみなせる太陽光や宇宙から飛来する電波が焦点に集まることになる。結果、微弱な信号を大きな信号に変換できるのである。蛇足ながら、そもそも “parabola” の名称が “放物線” であることを付け加えておこう。■