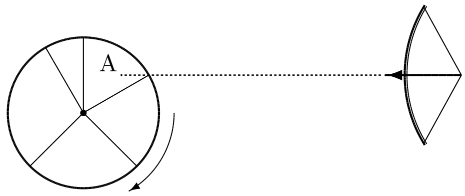
幾何的確率

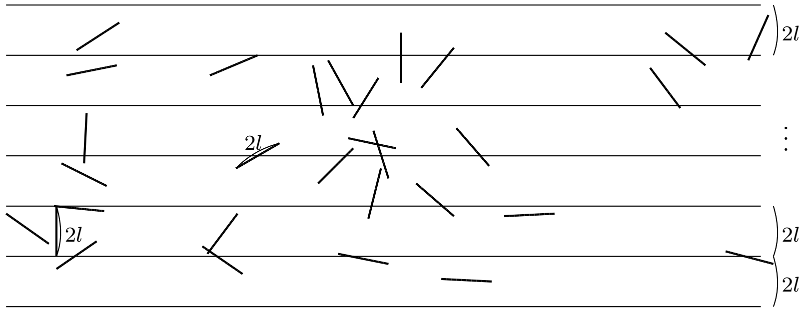
確率は、試行の結果起こり得る同様に確からしい n 通りの中に、事象 A が a 通り含まれるとき、$\dfrac{a}{n}$ を計算するものであった。要するに数えることができるものが対象であって、言い換えれば離散量に対する割合を求めているのである。



宝くじの当選番号を決める昔ながらの方法は、回転する円盤に向かって矢を射ることである。ただ、この方法は射手が熟練の腕前では具合が悪い。しかし、射手が射た矢が円盤のどこかに、同様に確からしく的中すると仮定するなら確率の計算ができるだろう。とは言うものの、円盤に矢が当たる場所は無数にあるので、矢が当たる場所が何通りあるかなど、とても数えるわけにはいかない。そこで、このような場合は起こり得る事象の数を数えるのではなく、図形の面積に注目するのがよい。そうすれば、円盤の面積と領域 A の面積を求めておけば、領域 A の面積が円盤の面積に占める割合を、事象 A が当たる確率と言ってよいだろう。このような視点で確率を考えてみよう。

ビュフォンの針の問題

十分な長さの平行線が、幅 $2l$ 間隔で平らな床に十分多く引かれているとする。この床に長さ $2l$ の針を多数ばらまいたら、どのぐらいの割合で針が平行線にかかるだろうか。これは、ビュフォン[1]の針の問題として知られている。

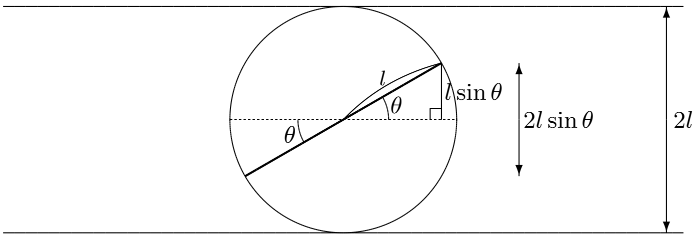


[1]ジョルジュ=ルイ・ルクレール・ド・ビュフォン（1707–1788）: フランスの博物学者・数学者。

要するに、ばらまかれた針が平行線にかかる確率を求めたいのである。平行線の間隔と針の長さを $2l$ としたのは計算の便宜のためであって本質的なものではない。どのように考えたらよいだろうか。それには 2 段階で考える必要がある。

1 つは針の中心がどの位置に落ちるかであり、もう 1 つは針と平行線がなす角がどれだけかということである。もし針の中心が平行線に近いところに落ちれば、針と平行線のなす角が小さくても平行線にかかるだろう。もし針の中心が平行線と平行線の真ん中に近いところに落ちれば、針と平行線のなす角が大きくても平行線にかからないかもしれない。つまり、針と平行線のなす角の大きさによって、針が平行線にかかる確率が変化することになる。すると、針が平行線にかかる確率は、針と平行線のなす角 θ の関数になっているだろう。

ところで、ここから確率計算をすることになるのだが、計算が 2 段階必要であったり、角 θ の関数を考えたりするとなると、実際には重責分やら確率密度関数やらが絡んでくるのである。確率の話を始めたばかりで、そんな大層な展開になっても困る。そこで、少々危なっかしい理屈を言うことになるが、単に 1 回の積分で済ませることにし、多少嘘っぽい点は大目にみてもらうことにする。



さて、平行線は $2l$ の間隔で連なっているので、針がどの平行線の間に落ちても、結局は $2l$ の幅を持つ一組の平行線の間のどこかに針の中心があると考えて差し支えない。図から分かるように、針が平行線となす角が θ のとき、針が鉛直方向に占める幅は $2l\sin\theta$ であるから、針と平行線のなす角が θ のとき針が平行線にかかる確率は、$2l\sin\theta$ が $2l$ に占める割合として

$$\frac{2l\sin\theta}{2l} = \sin\theta$$

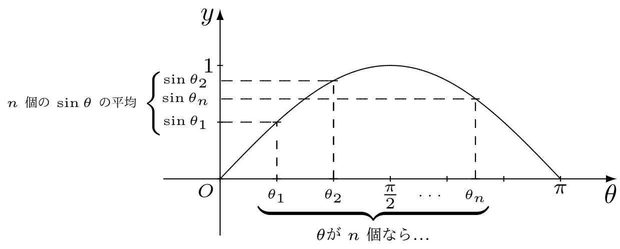
と考えてよいだろう。このことから、針と平行線のなす角が $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \ldots$ のとき、針が平行線にかかる確率は $\sin\theta_1, \sin\theta_2, \sin\theta_3, \ldots$ となる。

針と平行線のなす角 $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \ldots$ はどれも均等に起こり得ることなので、単に針が平行線にかかる確率を考えるなら、各々のなす角に対する確率を平均すればよいだろう。たとえば、取り得る

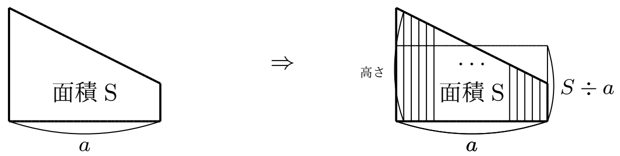
なす角が n 通りならば、求める確率 P_n は

$$P_n = \frac{1}{n}(\sin\theta_1 + \sin\theta_2 + \sin\theta_3 + \cdots + \sin\theta_n)$$

である。しかし、本当に知りたいのは $n \to \infty$ とした P_∞ なのである。



$n \to \infty$ のときの $\sin\theta_1 + \sin\theta_2 + \sin\theta_3 + \cdots + \sin\theta_n$ の値は、$\sin\theta$ が描く曲線が θ 軸と囲む面積である。それは積分で求められる。しかし、$n \to \infty$ のときの平均は ∞ で割ることではない。



たとえば底辺とみなした辺の長さが a の台形の面積を S とする。台形は左右の辺の長さが違っているのだが、ここで $S \div a$ を計算すると何が求められるだろうか。それは、台形の内部で測ることができる、あらゆる高さを平均した高さになるだろう。それは、どんな図形にも当てはまることである。

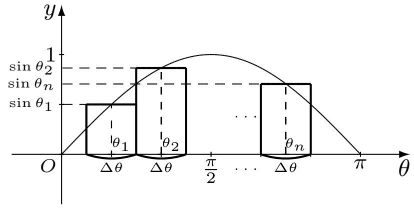
すなわち、$n \to \infty$ のときの $\sin\theta_1 + \sin\theta_2 + \sin\theta_3 + \cdots + \sin\theta_n$ の値の平均を求めるということは、図形の底辺である π で割ればよいことが分かる。よって、知りたい確率 P_∞ は

$$\begin{aligned} P_\infty &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \\ &= \frac{1}{\pi}[-\cos\theta]_0^\pi = \frac{1}{\pi}\{-(-1)-(-1)\} = \frac{2}{\pi} \end{aligned}$$

と考えてよいだろう。以上の計算により、針が平行線にかかる確率は $\dfrac{2}{\pi}$ であることが分かった。

* * *

計算の結果が正しいことは他の書籍等で確認できると思うが、経過は何となくうさん臭いと感じるだろう。その理由はちょっとしたインチキでごまかしているからである。



まず、$n \to \infty$ のときの $\sin\theta_1 + \sin\theta_2 + \sin\theta_3 + \cdots + \sin\theta_n$ の値が、積分で求められる面積であると言ったのはごまかしである。各 $\sin\theta_k$ は線分の長さを表すものだから、これらをいかに無数集めても面積にならないのである。面積を求めるなら、たとえば幅 $\Delta\theta$、高さ $\sin\theta_k$ の長方形を考えなくてはならない。したがって、$n \to \infty$ のときの $\sin\theta_1 + \sin\theta_2 + \sin\theta_3 + \cdots + \sin\theta_n$ の平均値を求めるのではなく

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sin\theta_1\cdot\Delta\theta + \sin\theta_2\cdot\Delta\theta + \sin\theta_3\cdot\Delta\theta + \cdots + \sin\theta_n\cdot\Delta\theta\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sin\theta_k\Delta\theta$$

の平均値を求めると言うべきであった。

次に、$\sin\theta_k$ の平均は、図形の底辺である π で割って求めると言ったのも微妙に不自然である。面積を底辺で割った値は $\sin\theta_k$ の平均ではなく、図形の底辺 1 あたりの値—それは長方形の高さに等しい—である。つまり、厳密に $\sin\theta_k$ の平均的な確率を求めたというより、針のなす角がある 1 の幅にあるときの平均的な確率であった。

しかし無理を承知で、何となく理屈に合うように計算したわけなので、結果はそれなりに納得できるのではないだろうか。そこで、Microsoft Excel でシミュレートすることで、ビュフォンの針の問題の解が $\dfrac{2}{\pi}$ である様子を見ることにしよう。針の長さと平行線の間隔は 1 とした。また、針がどの場所に落ちたとしても、針の中心を平行線に沿って平行移動して、x 座標が 0 の位置に置いても確率は変わらないのだから、シミュレーションでは x 座標は 0 に固定した。

◇	A	B	C	D	E	F
1	針の中心（y 座標）	sin θ	針の上端（y 座標）	針の下端（y 座標）	判定	
2	（※ **A2**）	（※ **B2**）	（※ **C2**）	（※ **D2**）	（※ **E2**）	
3	↓下へコピーする	↓下へコピーする	↓下へコピーする	↓下へコピーする	↓下へコピーする	
4	↓	↓	↓	↓	↓	
5	↓	↓	↓	↓	↓	
6	↓	↓	↓	↓	↓	

※ セルの式

（A2） =RAND()

（B2） =SIN(RAND()*PI())

（C2） =A2+B2

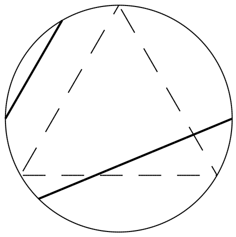
（D2） =A2-B2

（E2） =IF(OR(C2>=1,D2<=-1),”○”,””)

さて、平行線の幅は 1 だから、RAND 関数で得られる 0 以上 1 未満の値が、そのまま針の中心の y 座標を表す。π に RAND 関数の値を掛けて平行線となす角を $0°$ から $180°$ までにした上で、$\sin\theta$ を求めれば、針が占める上端の y 座標と下端の y 座標が計算できる。そして、針の上端か下端が平行線の幅を上回るか下回ったとき、針が平行線にかかったと判定するのである。適当な行までコピーしたところで、E 列に表示される○の割合を計算してみよう。$\dfrac{2}{\pi} \approx 0.6366$ に近い値になるのではないだろうか。▮

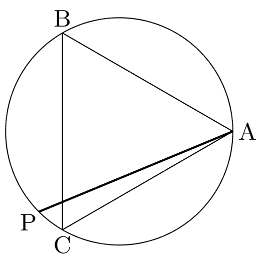
同様に確からしいこと

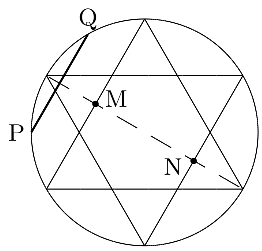
ビュフォンの針の確率には π が登場した。平行線の上に針をばらまく試行から得られる確率に、なぜ円周率の π が現れるのかは、実際に問題を解いてみなければ分からない。正しい解を知らなければ、その結果でよいかどうかの確信は持てないだろう。



ここで、ビュフォンの針の問題に似たようなものであるが、円周上の異なる 2 点を任意に選んだとき、2 点を結ぶ弦の長さが、その円に内接する正三角形の一辺の長さより長くなる確率はいくらか、という問題を考えてみよう。

ひとつの考え方は、引かれた弦 AP の一方の端点 A を頂点とする正三角形 ABC を描いてみることである。この場合頂点 B、C は、A の左右に円周の $\dfrac{1}{3}$ 進んだところに特定されるので、正三角形 ABC は 1 つに決まることに注意しよう。すると、弦 AP のもう一方の端点 P が弧 BC 上にあれば弦は正三角形の一辺より長いし、弧 BC 上になければ弦は正三角形の一辺より短い。すなわち、弦の長さの割合から、弦が正三角形の一辺より長くなる確率は $\dfrac{1}{3}$ だと結論できる。





別の考え方は、弦 PQ に対して正三角形の 1 辺が平行になるように、2 個の正三角形を描いてみることである。この場合も、正三角形は 2 個に特定されることに注意しよう。すると、弦 PQ の中点が線分 MN 上にあれば弦は正三角形の一辺より長いし、線分 MN 上になければ弦は正三角形の一辺より短い。すなわち、線分 MN が直径のちょうど半分を占めることから、弦が正三角形の一辺より長くなる確率は $\dfrac{1}{2}$ だと結論できる。

どちらも、もっともらしい解答に思えるが、さて、どちらが正しいのだろう。どちらの考えも、先に弦を任意の位置にあるものとし、正三角形は補助的に描いたに過ぎないので、一般的な考えをしていることは間違いない。しかし結論が違っているので、少なくとも一方の考えは間違っているはずである。もちろん、両方間違っているかもしれない。

実は、後の考えは間違っている。なぜなら、弦 PQ の中点が線分 MN を含む円の直径のどこにあるかは、同様に確からしいことではないからである。円周上の 2 点を選ぶことは、0 以上 2π 未

満の実数から 2 数を選ぶことに等しい。もし、それを別の同値な選び方に考え直すならば、点の選び方が同じ条件を保っていなければならない。後の考えは、円周上の 2 点を中点を用いて直径上の点にすり替えたわけであるが、円周上の点の変化と直径上の点の変化は同等ではない。直径は弦であることに注意しよう。弧の長さと弦の長さは比例していないのである。したがって、弧上の点を弦上の点に置き換える考えは間違っている。

　その点、先に挙げた解答は、弦の長さを円周上の端点の位置で比較したので、同等の置き換えである。これを少し違う視点で見るなら、円周上の 2 点を選ぶことを、2 点を結ぶ短い方の弧を含む扇形の中心角と同一視するのである。弧の長さは中心角の大きさに比例していて、中心角が 120° より大きければ弦の長さは正三角形の一辺の長さより長くなる。したがって、中心角の値を 0° より大きく 180° 以下から選んで扇形を作るとき、中心角が 120° より大きい扇形が作れるときが、2 点を結ぶ弦が正三角形の一辺より長くなる確率なのである。それは $(120^\circ \sim 180^\circ) : (0^\circ \sim 180^\circ)$ の割合であるから $\dfrac{1}{3}$ である。