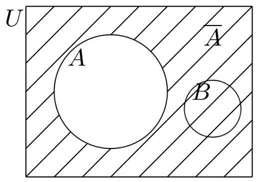
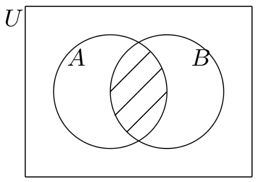
加法の性質

確率の計算は、全事象に対するある事象の割合を求めることが基本であるから、それぞれの事象の関係が分かることが肝要である。事象の関係は集合としてとらえるとよいだろう。





たとえば全事象を U として U の中の事象 A を考えると、A が起こらないことは左図の斜線で示される。それを ***A* の余事象**といい $\overline{A}$ で表す。$U = A+\overline{A}$ なのだから、確率を考えれば $1 = P(A)+P(\overline{A})$ である。全事象 U のどれかが起こる確率は $P(U) = 1$ であることに注意されたい。すなわち

$$\boxed{P(\overline{A}) = 1 - P(A)}$$

が成り立つ。

また同じ図で、集合 A は集合 B と共通するものがないので、事象 A と事象 B が同時に起こることはない。このようなとき、2 つの事象は互いに**排反する**という。互いに排反する事象においては、A または B が起こる確率 $P(A \cup B)$ は、A だけが起こる確率と B だけが起こる確率を合わせたものになる。したがって

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$$

になっている。一般に、n 個の事象についても同様なことがいえる。

しかし右図のように、2 つの事象が必ずしも排反であるとは限らないこともある。斜線部分は、2 つの事象が同時に起こっているのである。この場合は集合の要素の数 $n(X)$ に

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

という関係が成り立つので、事象が占める割合が確率であることより

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

がいえる。A と B が排反であるとき、この関係は $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ だったから、A、B が排反ならば $P(A \cap B) = 0$ である。

ところで $A \cup B$ とは、A か B のどちらかが起こることである。どちらかが起こることが期待される場合、これは集合の和集合に対応して、**和事象**と呼ばれる。

乗法の性質

2 つの事象があって、一方の事象が起こるか起こらないかに関わらず、他方の事象が起こる確率が変わらなければ、2 つの事象は**独立**であるという。たとえば、さいころと硬貨があって同時に投げたとする。このとき、さいころで 2 以下の目が出るなら硬貨は表の面が出やすいなどということはない。硬貨の面の出方はさいころの目の出方に影響されない。要するに、さいころの目の出方と硬貨の面の出方は独立である。独立な事象であっても、同時に起こることはある。たとえば、さいころで 2 以下の目が出て硬貨の表面が出ることは同時に起こることがある。

	1	2	3	4	5	6
表	○	○				
裏						

さいころと硬貨を投げた場合、起こる可能性は表の 12 通りであり、それぞれの起こり方は同様に確からしいと思ってよい。すると、さいころで 2 以下の目が出て硬貨の表面が出る場合は 2 通りあるので、そのような確率は $\dfrac{2}{12} = \dfrac{1}{6}$ である。

ところで、この $\dfrac{1}{6}$ という値は、

$$\frac{1}{6} = \frac{2}{6} \times \frac{1}{2}$$

のように、さいころで 2 以下の目が出る確率 $\dfrac{1}{3}$ と、硬貨の表面が出る確率 $\dfrac{1}{2}$ の積になっている。

一般に、独立な事象 A、B が同時に起こる確率 $P(A \cap B)$ は

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A)P(B)}$$

で与えられる。独立な事象が 3 個以上の場合も同様である。

*　　*　　*

排反であることと独立であることは、似ているようで実はまったく異なるものである。繰り返しになるが、排反とは

同時に起こることがない 2 つの事象

のことである。それは、基本的に 1 回の試行に含まれるいくつかの事象が対象である。たとえば 1 個のさいころを投げるとき、奇数の目が出る事象と偶数の目が出る事象はそれにあたる。さいころを 1 回投げただけでは、奇数の目と偶数の目が同時に出ることはあり得ない。

一方、独立とは

一方の事象が他方の確率に影響を与えないこと

である。それは、ある事象とは別のもう 1 つの事象が対象である。たとえば 1 個のさいころを 2 度投げるとき、2 回目に偶数の目が出る事象はそれにあたる。2 回目に偶数の目が出ることは、1 回目の目の出方に影響されない—最初投げたときさいころが破損しなければ、だが。▮

反復試行

1 回の試行で事象 A が起こる確率を p とする。また、この試行は繰り返し行うことができ、何回目においても条件は変わらないとする。すなわち、各試行は独立である。そこで、この試行を続けて n 回行ったとき、事象 A がちょうど r 回起ることを考えてみたい。

さいころを投げることを n 回続けて行った場合は、前回に出た目が次に出る目の確率に影響を与えないと考えてよいので独立試行となる。しかし、くじ引きでは先に引いたくじが当たるかはずれるかによって、次に引くくじが当たる確率が変わってしまうので独立試行ではない。ここでは、さいころを投げる確率を取り上げることにする。

具体的に、さいころを続けて 5 回投げるとき、5 以上の目が出る事象がちょうど 2 回起こる場合を考えよう。5 以上の目が出ることを○で、それ以外の目が出ることを×で表すと、このような状況は 10 通りあり

1 回	2 回	3 回	4 回	5 回	確率
○	○	×	×	×	$\frac{1}{3}\frac{1}{3}\frac{2}{3}\frac{2}{3}\frac{2}{3}$
○	×	○	×	×	$\frac{1}{3}\frac{2}{3}\frac{1}{3}\frac{2}{3}\frac{2}{3}$
○	×	×	○	×	$\frac{1}{3}\frac{2}{3}\frac{2}{3}\frac{1}{3}\frac{2}{3}$
○	×	×	×	○	$\frac{1}{3}\frac{2}{3}\frac{2}{3}\frac{2}{3}\frac{1}{3}$
×	○	○	×	×	$\frac{2}{3}\frac{1}{3}\frac{1}{3}\frac{2}{3}\frac{2}{3}$

1 回	2 回	3 回	4 回	5 回	確率
×	○	×	○	×	$\frac{2}{3}\frac{1}{3}\frac{2}{3}\frac{1}{3}\frac{2}{3}$
×	○	×	×	○	$\frac{2}{3}\frac{1}{3}\frac{2}{3}\frac{2}{3}\frac{1}{3}$
×	×	○	○	×	$\frac{2}{3}\frac{2}{3}\frac{1}{3}\frac{1}{3}\frac{2}{3}$
×	×	○	×	○	$\frac{2}{3}\frac{2}{3}\frac{1}{3}\frac{2}{3}\frac{1}{3}$
×	×	×	○	○	$\frac{2}{3}\frac{2}{3}\frac{2}{3}\frac{1}{3}\frac{1}{3}$

以上ですべてである。それぞれが起こる確率は、5 以上の目が出る確率が $\dfrac{1}{3}$ で、それ以外の目が出る確率が $\dfrac{2}{3}$ であるから、5 以上の目がちょうど 2 回出る確率は、積の法則によってそれぞれの積となる。

確率の計算を見ると、どれも $\dfrac{1}{3}$ が 2 個と $\dfrac{2}{3}$ が 3 個である。したがって、どの場合においても確率は同じで、それは $\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\left(\dfrac{2}{3}\right)^3$ になっている。よって、さいころを続けて 5 回投げて、5 以上の目がちょうど 2 回出る確率は、これら 10 通りに和の法則を適用して

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3=\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3\times 10=\frac{80}{243}$$

と計算できることが分かる。

反復試行の確率

反復試行の確率は、一般化して表すことができる。まず、反復試行とは

確率 p で起こる独立事象 A を、繰り返し n 回行う試行

であるとし、そのうち事象 A がちょうど r 回起こる確率を反復試行の確率 $P(r)$ と呼ぶことにする。

さて、n 回の試行において事象 A がちょうど r 回起こるなら、残る $(n-r)$ 回は事象 A が起こらないことになる。事象 A が起こる確率は p なので、事象 A が起こらない確率は $(1-p)$ である。反復試行を n 回行って、そのうち r 回は A が起こり、$(n-r)$ 回は A が起こらなければ、その確率は

$$p^r(1-p)^{n-r}$$

であるはずだ。しかし例で見たように、A が r 回起こる起こり方は、n 回の試行の中のどこで起こるかによって様々なパターンがあり、そのパターンは n 個から適当に r 個を選ぶ選び方だけ存在する。それは ${}_nC_r$ 通りである。したがって、

確率 p で起こる独立事象 A を繰り返し n 回行って、事象 A がちょうど r 回起こる確率 $P(r)$ は、${}_nC_rp^r(1-p)^{n-r}$ である

といえるのである。