確率

少し時間をかけて数の数え方を見てきた。何のためにそうしたかと言えば、確率を計算するために必要なことだからである。

天気予報における降水確率であるとか、事故が起きる確率であるとか、試合に勝つ確率であるとか、世の中には確率を引き合いに出す例は枚挙にいとまがない。しかし、それらは経験に基づく確率と言ってよいだろう。過去に、ある状況の下で雨が降ることが多ければ、似たような状況が生じたときは雨が降る可能性は高まる。過去の対戦成績において、A が B より多く勝っていたなら、今度の対戦においても A が勝つ可能性は高い。

可能性というような捉え方では漠然としているので、もう少し数量的に考えてみよう。まず、経験したことや観察することを**試行**といい、試行によって起こる事柄を**事象**という。降水確率でいえば、過去に生じたある特定の状況が N 回あって、そのうち r 回で雨が降ったとすれば、N 回の試行に対する r 回の事象を相対度数 $\dfrac{r}{N}$ で表すことができ、それがある特定の状況における降水確率と呼ばれる。

一方で、経験によらない確率を考えてもよい。1 個のさいころは 6 つの面を持っている。細工がしてなければ、さいころを 1 回投げたとき、6 つの面のどれが出やすいなどということはないだろう。すると、おのおのの面がでる相対度数は $\dfrac{1}{6}$ であると考えられる。このように、どの事象も同程度に起こることが期待されることを、**同様に確からしい**と表現し、確率を考える場合は、同様に確からしいことが前提になっているのである。

*　*　*

上記において、経験に基づく確率（経験的確率）と経験によらない確率（理論的確率）を分けて考えているが、理論的確率を実験した場合、試行が十分多ければ、実験結果は理論値に近づく。これを**大数（たいすう）の法則**という。たとえば、さいころを投げておのおのの目が出る確率は理論的に $\dfrac{1}{6}$ であるからといって、6 回投げれば必ずしも 1 から 6 の目が 1 回ずつ出るわけではない。しかし、投げる回数を 6 万回とか 60 万回とかに増やせば、どの面も大体 1 万回程度とか 10 万回程度は出ているのである。▮

確率の基礎事項

確率は N 回の試行で起こる r 回の事象を用いて $\dfrac{r}{N}$ で定義できる。N 回の試行で事象 A が起こる確率を $P(A)$ で表せば

$$\boxed{0 \leqq P(A) \leqq 1}$$

が成り立つ。なぜなら r のとりうる値は、事象 A がまったく起こらなければ $r=0$ であり、常に事象 A が起これば $r=N$ であるから、r は $0 \leqq r \leqq N$ を満たすからである。また、相対度数 $\dfrac{r}{N}$ が割合を表すことから、%を用いて表示することも多い。降水確率はその一例である。

ところで確率は、同様に確からしいことを前提に考えるのだが、実際は降水確率では何が同様に確からしいかは判然としない。そもそもある試行において、これ以上細かく分類できない事象を**根元事象**と呼ぶが、降水確率の根元事象は何かと問われると少し心もとない。さいころを投げる試行においては、偶数の目が出る事象や 5 以上の目が出る事象などが考えられるが、それらは 2 や 4 や 6 の目が出るとか、5 や 6 の目が出るなどの根元事象に分解できる。さいころを投げて偶数の目が出る確率は $\dfrac{3}{6}$ であるというときには、2, 4, 6 の目が出ることが同様に確からしいと考えているからである。

しかし、降水確率を考える場合のように、相対度数を確率としてとらえるなら、各根元事象が同様に確からしい—つまり根元事象が等しい割合で起こる—ことが保証されなくてもよいのである。

確率の計算、数えること

確率の計算は結局のところ、同様に確からしい n 通りの事象—**全事象**—に対する、a 通りの起こる場合の数の割合 $\dfrac{a}{n}$ を求めることである。それは、ただ n と a を数えることができればよいことを意味している。1 個のさいころを投げれば 1 の目から 6 の目が出る。さいころに細工がなければ、どの目が出る場合も同様に確からしい。すなわち、1 個のさいころを投げて得られる全事象は 6 通りである。このうち、偶数の目が出ることを考えると、それは 2 か 4 か 6 の目の 3 通りであるから、1 個のさいころを投げて偶数の目が出る確率は

$$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

である。割合は 50%となる。

数え方については、和の法則や積の法則、順列や組合せなど様々な数え方があった。ここでは、確率を単に数えることとしていくつかの例を示しておこう。

数える確率

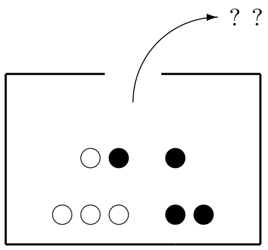
いちばん単純なのは 2 個のさいころを同時に投げて、目の和が何々であるとか、少なくとも 1 個の目が奇数であるとかの確率を求める場合であろう。さいころは 2 個しかないので、36 通りのす

べてを書き出すことは容易だが、どんな図や表を使うかで効率は違ってくるだろう。たとえば

$_A\backslash^B$	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

のような一覧表を作ってしまえば、重複して数えたり、数え落とす心配は少なくなるだろう。

また、順列や組合せの計算をしながら数える場合も多い。少し作為的ではあるが次のようなくじ引きを考えてみよう。



箱に赤玉 4 個と白玉 4 個が入っていて、同時に 2 個の玉を取り出すものとする。このとき、2 個とも赤玉であれば当たりで、それ以外がはずれになるとすると、くじを 1 回引いて当たる確率はどれだけか求めてみよう。

確率が $\dfrac{\text{当該事象}}{\text{全事象}}$ で定義されていたことを思い出せば、ここでの全事象は 8 個の玉から色に関係なく 2 個の玉を選ぶことであるから、${}_8C_2 = \dfrac{8\cdot 7}{2\cdot 1} = 28$（通り）である。また、当たるためには何が何でも 4 個の赤玉から 2 個を選ぶことが必要であるから、${}_4C_2 = \dfrac{4\cdot 3}{2\cdot 1} = 6$（通り）である。したがって求める確率は

$$\frac{6}{28} = \frac{3}{14}$$

である。

もし、2 個とも同じ色の玉のときが当たりであったなら、{ 白, 白 } の場合も当たりであり、これも同じ計算で $\dfrac{3}{14}$ であるから、和の法則より

$$\frac{3}{14} + \frac{3}{14} = \frac{3}{7}$$

である。図を見ていると同じ色の玉なら何となく取れそうに見えるけれど、五分五分よりも分が悪いのは少し意外な感じがする。

*　*　*

2 個のさいころを投げて、何らかの確率を考えるとき、明示的に「大きさの異なる 2 個のさいころ」などと表現することはよくあることである。これにより、表中の (1, 2) と (2, 1) の目は (大, 小) が異なる目の出方であることがはっきりする。しかし、このような断りの表現がなくとも 2 個のさいころと言えば、それは異なる物体なのである。

以前、赤-赤、青-青、赤-青の 3 枚のカードを例に数え方の注意を与えたが、むしろこちらの方が異なるカードであることがはっきりしているのに、見えている表面の色を区別し損なうことになっている。▮