二項展開

文字式の展開において、いくつかの公式、たとえば

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2 \\ (a+b)^3 &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\end{aligned}$$

を見てみよう。一見、順列や組合せの話題にそぐわないように感じるかもしれない。だが、そうではない。このような**二項展開**では組合せの考えが基本になっているのである。$(a+b)^3$ を

$$(a+b)(a+b)(a+b)$$

と書いてみると、式を展開するということは、3 個ある ( ) 内の文字から、何を選んで掛け合わせるかという問題に帰着できる。

左の ( ) から順に a, a, a と選んで掛け合わせれば a^3 になるし、b, a, b と選んで掛け合わせれば ab^2 になる。展開とは、これらすべての掛け合わせを書き出した上で、同類項をまとめたものである。同類項は掛けられた文字の個数で分類される。たとえば ab^2 と同類項になるのは、それぞれの ( ) の中から 1 個の a と 2 個の b を選んだ場合である。このとき a を 1 個選ぶと決めたら残り 2 個は b になるのだから、組合せとして考えればよいのは、1 個の a を選ぶ場合の数か、または 2 個の b を選ぶ場合の数のどちらかでよい。後の話の都合があるので、ab^2 は 2 個の b を選ぶ場合の数—— ${}_3C_2$ ——として考えておく。

さて、b の選び方としては、0 個、1 個、2 個、3 個の 4 通りがあり、それらの項は順に a^3、a^2b、ab^2、b^3 である。どの項も必ず 3 個の文字を選ぶことと、3 個に足りない b 以外の文字が a であることに注意されたい。そして、それらを選ぶ場合の数は、順に ${}_3C_0$、${}_3C_1$、${}_3C_2$、${}_3C_3$ であることから、$(a+b)^3$ の展開が

$$(a+b)^3 = {}_3C_0a^3 + {}_3C_1a^2b + {}_3C_2ab^2 + {}_3C_3b^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

になるのである。

二項定理

$(a+b)^3$ の展開の仕組みが分かれば、一般の $(a+b)^n$ の展開の仕組みが分かる。展開された項はすべて a^pb^r $(p+r=n)$ の形をしている。各項の係数を b の個数 r で特定するなら、その係数は ${}_nC_r$ である。このとき a の個数 p は $p=n-r$ だから、各項は

$$\boxed{{}_nC_r a^{n-r} b^r \ (r = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n)}$$

の形をしていることになる。このことから $(a+b)^n$ を書き下すと

$$\boxed{(a+b)^n = {}_nC_0 a^n + {}_nC_1 a^{n-1} b + {}_nC_2 a^{n-2} b^2 + \cdots + {}_nC_r a^{n-r} b^r + \cdots + {}_nC_n b^n}$$

である。これを**二項定理**と呼ぶ。

二項定理からの派生

二項定理には組合せの計算である ${}_nC_r$ が使われている。そこで二項定理を少しいじってやると、組合せに関する関係式を導くことができる。たとえば二項定理において、$a = b = 1$ を代入すると、$a + b = 2$ で、$a^{n-r}b^r$ はすべて 1 になるから

$$2^n = {}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \cdots + {}_nC_n$$

である。これは、n 個のものから 0 個、1 個、2 個、. . . 、n 個とる組合せの総数が 2^n であることを意味しているのだが、ものの数が 1 個増えるたびに、組合せの総数が倍々となる点は興味深い。

また、$a = 1$、$b = -1$ を代入すると、$a + b = 0$ で、$a^{n-r}b^r$ は交互に 1, -1 をとるので

$$0 = {}_nC_0 - {}_nC_1 + {}_nC_2 - {}_nC_3 + \cdots + (-1)^n {}_nC_n$$

となって、負の項を移項して

$${}_nC_0 + {}_nC_2 + {}_nC_4 + \cdots + {}_nC_{\text{偶数}} = {}_nC_1 + {}_nC_3 + {}_nC_5 + \cdots + {}_nC_{\text{奇数}}$$

が成り立つ。これは、n 個のものから偶数個とる組合せの総数と、n 個のものから奇数個とる組合せの総数が等しいということが分かる。

二項定理から派生する関係式ではないが、二項定理は展開式の任意の項の係数を求めるのに役立つ。たとえば $\left(2x^2 - \dfrac{1}{x}\right)^{10}$ の展開式における、x^8 の係数を知りたいとする。この展開式の一般項は二項定理との対応から

$$(a+b)^n \ \to \ {}_nC_r a^{n-r} b^r \quad \text{より} \quad \left\{(2x^2) + \left(-\frac{1}{x}\right)\right\}^{10} \ \to \ {}_{10}C_r (2x^2)^{10-r} \left(-\frac{1}{x}\right)^r$$

である。整理すると

$${}_{10}C_r (2x^2)^{10-r} \left(-\frac{1}{x}\right)^r = {}_{10}C_r 2^{10-r} (x^2)^{10-r} (-1)^r (x^{-1})^r = {}_{10}C_r 2^{10-r} (-1)^r x^{20-3r}$$

となるので、これが x^8 の項であるためには $x^{20-3r}=x^8$ でなければならない。このことから $r=4$ が特定できる。よって、その係数は

$$ {}_{10}C_4 2^{10-4}(-1)^4 = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\cdot 2^6\cdot 1 = 1920 $$

である。また、この計算の仕組みから、x^7 の項は展開式の中にないことも分かる。なぜなら $20-3r=7$ を満たす正の整数がないからである。

パスカルの三角形

以前、組合せ計算の関係式

$$ {}_nC_r = {}_{n-1}C_r + {}_{n-1}C_{r-1} \quad (※) $$

を示したことを覚えているだろうか。その上でおなじみの展開公式を、係数だけ並べて書き出してみよう。つまり

$$
\begin{array}{ccccccc}
(a+b)^2 & \to & & & 1 & 2 & 1 \\
(a+b)^3 & \to & & 1 & 3 & 3 & 1 \\
(a+b)^4 & \to & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
 & & (\text{第}\,4\,\text{項}) & (\text{第}\,3\,\text{項}) & (\text{第}\,2\,\text{項}) & (\text{第}\,1\,\text{項}) & (\text{第}\,0\,\text{項})
\end{array}
$$

ということである。ただし、この後の説明のため、係数は右寄せで書いてあることに注意されたい。

さて、組合せ計算の関係式と係数の並びには何か関係があるだろうか。まず、${}_nC_r$ とは、n 乗の展開式の右第 r 項の係数を表している—係数は左右対称であるから、ここではいちばん右の項を第 0 項として右から数えていることに注意されたい。

	第 n 項	第 $(n-1)$ 項	...	第 r 項	第 $(r-1)$ 項	...	第 0 項
$(a+b)^{n-1}$		${}_{n-1}C_{n-1}$	...	${}_{n-1}C_r$	${}_{n-1}C_{r-1}$	...	${}_{n-1}C_0$
$(a+b)^n$	${}_nC_n$	...	...	${}_nC_r$	...	...	${}_nC_0$

一方で ${}_{n-1}C_r$ と ${}_{n-1}C_{r-1}$ とは、$(n-1)$ 乗の展開式の第 r 項と第 $(r-1)$ 項の係数を表している。つまり（※）が意味することは、n 乗の展開式の係数は $(n-1)$ 乗の展開式の係数が分かれば、その和に過ぎないと言っているのである。

はじめに示した $(a+b)^4$ の展開式の係数を見てもらいたい。実際、4 乗の展開式の係数は、上の段の 3 乗の展開式の係数の和から得られている。たしかに、$1+3=4$、$3+3=6$、... などとなっ

ている。すると、5 乗の展開式の係数は、$1+4=5$、$4+6=10$、$\ldots$ となることが分かる。この仕組みを図式的に描いたものが次の図である。

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & & & & & \vdots & & & & &
\end{array}
$$

この図は**パスカルの三角形**と呼ばれ、$(a+b)^n$ の展開式の係数を知るのに便利である。ちなみに、1 行目は $(a+b)^1 = a+b$ の係数を表している。

*　　*　　*

パスカルの三角形を Microsoft Excel で再現することは容易である。ただ、上段の 2 数の和を下中央に書くようにすると、セルを互い違いに結合しなければならないなど面倒が多い。そこで、見栄えは無視することにして、係数を左寄せで書き並べることにする。

◇	A	B	C	D	E	F	G	H
1	1	1						
2	1	=A1+B1	1					
3	1	↓下へコピーする	→右へコピーする	1				
4	1	↓	→右へコピーする→		1			
5	1	↓	→右へコピーする→		→	1		
6	1	↓	→右へコピーする→		→	→	1	
7	1	↓	→右へコピーする→		→	→	→	1
8	1	↓	→右へコピーする→		→	→	→	→

A 列は縦に 1 を入力しておく。B1 セルからは右下に向けて 1 を入力しておく。上の 2 数の和については、本来なら左斜め上と右斜め上の和であろうが、ここでは左上のセルと真上のセルの和としておく。B2 セルはそのように式が入力されている。後のセルは、すべて同じ計算であるからコピーを繰り返すだけである。n 行目に並ぶ数列が、そのまま $(a+b)^n$ の展開式の係数となっている。

パスカルの三角形に現れる数は単に 2 数の和であるが、すぐに大きな数になってしまう。数自体を眺めていてもいろいろな発見があるかもしれない。▮

多項定理

項数が 2 より大きい多項式を展開するとき、たとえば $(a+b+c)^n$ の展開であれば、$\{a+(b+c)\}^n$ と見て 2 項展開ができる。その一般項は

$$ {}_nC_s a^{n-s}(b+c)^s = {}_nC_s a^{n-s} \cdot {}_sC_t b^{s-t} c^t $$

となって、簡単に求められるはずである。ただ、さらに項数が増えると、繰り返し 2 項展開をするのも煩わしい。

係数をもう少し計算してみよう。上述の一般項から係数だけを抜き出して整理すると

$$
{}_nC_s \cdot {}_sC_t \quad = \quad \frac{n!}{s!(n-s)!} \cdot \frac{s!}{t!(s-t)!} = \frac{n!}{(n-s)!(s-t)!t!}
$$

となるが、$(n-s)$ が a の指数、$(s-t)$ が b の指数、t が c の指数であることに注意して、改めて一般項を $Ka^pb^qc^r \quad (p+q+r=n)$ と書き直してみると

$$
\boxed{(a+b+c)^n \text{ の一般項は } \frac{n!}{p!q!r!}a^pb^qc^r \quad (p+q+r=n)}
$$

であるといえる。これは $(a+b+c+\cdots)^n$ の一般項にも容易に拡張できる。