重複順列

ものを数えるとき考えの基本となることは、和の法則、積の法則、順列、それに組合せである。数えるときに、順番を考慮するのか、重複を考慮するのかなど、様々な条件があるかもしれないが、極論すればこれですべてである。

たとえば、$\boxed{1}$、$\boxed{2}$、$\boxed{3}$、$\boxed{4}$、$\boxed{5}$の5枚の カードから3枚使って3桁の数を作るなら、それは5個から3個とる順列に他ならないので ${}_5P_3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$（通り）の場合の数がある。

しかし、1、2、3、4、5の5種類の 数字を使って3桁の数を作るなら、積の法則により

百の位		十の位		一の位		
5	×	5	×	5	=	125（通り）

の場合の数がある。“5枚の” とか “5種類の” とかの表現で重複を許すかどうか判断するのもよくないので、実際は重複の可否をきちんと述べるのが礼儀だろう。

すると、重複を許さない順列と重複を許す順列では考え方が違う。いまの例から、一般には n 個から重複を許して r 個とる順列は

$$\boxed{\underbrace{n \times n \times n \times \cdots \times n}_{r\text{ 個}} = n^r}$$

であることになる。

重複組合せ

重複組合せとは、組合せの数を数える際、同じものを組の中に入れてよいとするものである。たとえば、a、b、c、d、e の5文字から順番を無視して3文字選ぶ場合、組合せでは3文字が全て異なるのに対し、重複組合せは $\{a,\ a,\ b\}$ のように同じ文字を含めてよい。

しかし、重複組合せは特殊な組合せに過ぎないので、工夫して数えることで場合の数を求められる。いま、5文字から3文字選んだ重複組合せがすべて列挙されているとする。この場合、$\{a,\ a,\ b\}$、$\{a,\ b,\ a\}$、$\{b,\ a,\ a\}$ はすべて同じことなのだから、書き並べる際には辞書順になっているもの—この場合なら $\{a,\ a,\ b\}$ —が代表で書き出されることにする。すると、列挙された重複組合せは

$$\{a,\ a,\ a\}、\{a,\ a,\ b\}、\{a,\ a,\ c\}、\ldots、\{b,\ c,\ c\}、\{b,\ c,\ d\}、\ldots、\{e,\ e,\ e\}$$

のようになるだろう。ここで、重複している文字に、重複しないように別の文字—ここでは F や G —をあてがうことにする。いまは 3 文字を選んでいるので、別に用意する文字は最大で 2 文字でよいことに注意しよう。

そうすることで、初め重複していた 1 つ 1 つの組合せは、重複のない組に書き換えられる。

$$\{a,\ F,\ G\}、\{a,\ F,\ b\}、\{a,\ F,\ c\}、\ldots、\{b,\ c,\ F\}、\{b,\ c,\ d\}、\ldots、\{e,\ F,\ G\}$$

この書き換えは一意である。なぜなら、各組は辞書順に並べておいたので、各組を左の要素から順に見て大文字にあたったら、その大文字は直前と同じ小文字に置き換えられるからである。かくして、a、b、c、d、e から 3 文字を選ぶ重複組合せの数と、a、b、c、d、e、F、G から 3 文字を選ぶ組合せの数は同数であることが分かる。よって、

$${}_7C_3 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35 \ (\text{通り})$$

と計算できることが分かった。

一般に、n 個から重複を許して r 個とる重複組合せは、重複しない要素を追加したものから r 個とる組合せの数に等しい。r 個とる場合は、最大でも $(r-1)$ 個の要素を追加すればよいので、n 個から r 個とる重複組合せは

$$\boxed{{}_{n+r-1}C_r}$$

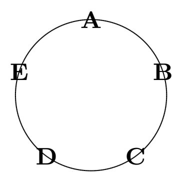
であるといえる。

円順列

異なる n 個のものを円形に並べることを考えてみる。たとえば A、B、C、D、E の 5 個のものを等間隔に円周上に並べてみる。

1) A B C D E
2) B C D E A
3) C D E A B
4) D E A B C
5) E A B C D

⇒



一列に並べたものを円周上に並べると、先頭と最後尾がつながってしまうので、左図の 1) から 5) のように、単に一列に並べたものは皆同じことになるだろう。これを逆に見ると、円周上に順

番に並べたものを普通に一列に並べるとしたら、円周のどこで切って一列にするかが問題になる。切りどころは 5 か所あるので、ただ 1 つの円順列から 5 個の普通の順列ができるのである。すなわち、(普通の順列) = (円順列の総数) × 5 が成り立つ。一般に n 個のものを円周上に並べると (普通の順列) = (円順列の総数) × n となる。よって、異なる n 個のものの円順列の場合の数は

$$\boxed{\frac{n!}{n} = (n-1)!}$$

がいえる。したがって、同じようなことであるが、異なる n 個から r 個とって円周に並べる場合の数は

$$\boxed{\frac{{}_nP_r}{n}}$$

である。

一般的に円順列というと、それは円卓に座る様子を思い浮かべるかもしれないが、ネックレスのようなものも円順列の一種である。しかし、ネックレスは裏返しても同じことなので、たとえば異なる n 個のものを数珠（じゅず）つなぎにする場合の数は

$$\boxed{\frac{(n-1)!}{2}}$$

であるといってよい。この場合の数は、とくに数珠順列ということがある。

同じものを含む順列

順列や組合せを考えるとき、大抵はそれぞれの要素は 1 個ずつである。そして、選ぶ際に重複を許すかどうかで計算方法が変わってくる。それに対して、はじめから同じものがあり、それを順に並べる場合はどうだろうか。たとえば、a 個の A、b 個の B、c 個の C で合計 n 個のものを、一列に並べるとしよう。このようなときは次のように考えるとよい。

$$\overbrace{\underbrace{\mathrm{A}_1、\mathrm{A}_2、\mathrm{A}_3、\ldots、\mathrm{A}_a}_{a\text{ 個}} \quad \underbrace{\mathrm{B}_1、\mathrm{B}_2、\mathrm{B}_3、\ldots、\mathrm{B}_b}_{b\text{ 個}} \quad \underbrace{\mathrm{C}_1、\mathrm{C}_2、\mathrm{C}_3、\ldots、\mathrm{C}_c}_{c\text{ 個}}}^{n\text{ 個}}$$

まず、複数ある A、B、C を区別するために、A_1、A_2 のような添え数を与えることにする。これにより、見かけ上異なる n 個の文字を一列に並べることができる。その場合の数は $n!$ である。ところが、たとえば

$$\mathrm{A}_2\ \mathrm{B}_1\ \mathrm{A}_5\ \mathrm{C}_1 \ldots \text{の並び} \qquad \text{と} \qquad \mathrm{A}_3\ \mathrm{B}_1\ \mathrm{A}_2\ \mathrm{C}_1 \ldots \text{の並び}$$

は、実際は A B A C . . . という同じ順列である。添え数を付けたことによって、同じものを重複して数えているのである。重複はどれだけあるだろうか。

A、B、C のそれぞれについて見ると、A には添え数 a の分だけ重複して数えている。それは B、C についても同じことなので、これらは皆 1 通りで扱えばよいことになる。したがって、a 個、b 個、c 個の合計が n 個であるものを、一列に並べる場合の数は

$$\boxed{\frac{n!}{a!b!c!}}$$

ということになる。一般に $a + b + c + \cdots = n$ である、n 個のものを一列に並べる場合の数は

$$\frac{n!}{a!b!c! \cdot \cdots}$$

なのである。

同じものを含む組合せ

ここまで、順列や組合せの考えを基本にして一般的な考察ができたが、同じものを含む組合せの計算は一般的な考察をするのが難しい。このようなときは、その都度適切に対処するしかないものである。

たとえば、100 円玉 3 枚、50 円玉 2 枚、10 円玉 5 枚があるとする。このとき、ちょうど支払うことのできる金額は何通りあるか考えてみよう。その前に、この手の問題には基本的な考え方というものがあることから始めよう。

100 円玉は 3 枚まで使えるのだから、使わないという選択肢を含めて 4 通りの使い方がある。これが基本的な考え方である。また、50 円玉は 2 枚まで使えて、使わないという選択肢を含めて 3 通りの使い方があり、10 円玉は 5 枚まで使えて、使わないという選択肢を含めて 6 通りの使い方がある。これらは、そのおのおのについて互いに起こることなので、積の法則より

$$4 \times 3 \times 6 = 72 \text{（通り）}$$

と計算できる。しかし、この中にはどの硬貨もまったく使わない場合が 1 通り含まれていて、それでは支払いにならないだろう。よって、71 通りとなるが、これは支払うことができる金額ではなく、異なる組合せで作れる金額である。つまり、100 円玉 1 枚と 50 円玉 2 枚は異なる組合せであるが、支払う金額としてはどちらも 100 円であるから同じことになっているのである。

では、本当は何通りの金額が支払えるのだろう。この場合は 10 円玉が 5 枚と 50 円玉が 2 枚あるから、10 円から 100 円という金額はいつでも作れる。あとはそこに 100 円玉を何枚含ませられるかによるので、結局

100 円玉	50 円玉	10 円玉	作れる金額
0 枚	0 枚から 1 枚	1 枚から 5 枚	10 円から 100 円
1 枚	0 枚から 1 枚	1 枚から 5 枚	110 円から 200 円
2 枚	0 枚から 1 枚	1 枚から 5 枚	210 円から 300 円
3 枚	0 枚から 1 枚	1 枚から 5 枚	310 円から 400 円
3 枚	2 枚	1 枚から 5 枚	410 円から 450 円

の 45 通りということになる。