組合せ

4 個の帽子から 2 個だけ選んで旅行に持っていくことを考えよう。順列であれば ${}_4P_2 = 4\cdot 3 = 12$（通り）なのだが、帽子を鞄につめるときに順番に並べることはしないだろう。つまり A-B の順に鞄につめようが B-A の順につめようが、同じものを持っていくことに変わりない。これはどの 2 個の帽子についても言えることである。${}_4P_2$ で数えられた中には、重複して数えているものがあるということである。

2 個の帽子を順番に並べる、${}_2P_2 = 2! = 2\cdot 1 = 2$（通り）の数え方は、鞄につめる行為の前には同じ選び方になってしまう。このことから、4 個の帽子から 2 個だけ選んで鞄につめる場合の数は

$$\frac{{}_4P_2}{2!} = \frac{4\cdot 3}{2\cdot 1} = 6 \text{（通り）}$$

と計算するのが正しいことになる。実際、6 通りすべてを書き出すことは容易にできて

$$\{\mathrm{A, B}\}、\{\mathrm{A, C}\}、\{\mathrm{A, D}\}、\{\mathrm{B, C}\}、\{\mathrm{B, D}\}、\{\mathrm{C, D}\}$$

であることが分かる。6 通り程度なら気がつく順に書き出しても、重複や見落としをする可能性はないだろうが、ここでは**辞書順**に書き出していることに注意されたい。

このように、異なる n 個のものから順番を無視して r 個とるものを

$$\boxed{n \text{ 個から } r \text{ 個とる}\textbf{組合せ} := {}_nC_r}$$

といい、${}_nC_r$ で表す[1]。いまの例から分かるように

$${}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!} = \frac{\overbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}^{r\text{ 個}}}{r(r-1)(r-2)\cdots 1}$$

という定義になっている。

* * *

いま、帽子 A、B を選ぶことを {A, B} で表したが、いくつかのもを順番を無視して選んで書き出すときは、“{” と “}” で囲むことにしよう。これは、集合 $\{a,\ b,\ c\}$ というときは a、b、c の順番を考えないことと同じである。

また、順番を考慮して A、B を選ぶときは (A, B) で表すことにしよう。これは、座標 $(x,\ y)$ と $(y,\ x)$ が一般には異なることと同じである。いずれもとくに決められた約束ではないが、このような習慣を持つことは悪いことではないだろう。▮

[1] 記号 C は、組合せ（combination）の頭文字。${}_nC_r$ は単に “$n\ c\ r$” と読むか、“*combination* $n\ r$” と読む。

組合せの性質

n 個から r 個とる組合せを図式的に見ておこう。

$$\overbrace{\underbrace{\bigcirc\bigcirc\bigcirc\cdots\bigcirc}_{r\text{ 個とる}}\ \underbrace{\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\cdots\bigcirc\bigcirc}_{(n-r)\text{ 個残る}}}^{n\text{ 個}}$$

n 個から r 個とることは、n 個のうち $(n-r)$ 個残すことと同じである。すると、n 個から r 個とる場合の数が X 通りあれば、n 個のうち $(n-r)$ 個残す場合の数も X 通りである。このことは

$$\boxed{{}_nC_r = {}_nC_{n-r}}$$

が成り立つことを意味している。具体的には、たとえば ${}_9C_7 = {}_9C_2$ ということなのだが、計算のことを考えるならば

$${}_9C_7 = \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} \quad \text{と} \quad {}_9C_2 = \frac{9\cdot 8}{2\cdot 1}$$

はどちらが簡単かということになる。実際には ${}_9C_7$ も約分すれば ${}_9C_2$ と同じになるので、最終的な計算量は変わらないのだが、${}_9C_2$ にした方が扱いやすいことは間違いない。

さて、${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$ において $r = n$ のときを考えると、${}_nC_n = {}_nC_0$ となる。${}_nC_n = 1$ であることは明白なので、等式が正しいとすると ${}_nC_0 = 1$ でなくては具合が悪い。記号の意味から、n 個から 0 個とる組合せの数という、いささか妙な解釈をしなくてはならないが、

$$\boxed{{}_nC_0 = 1}$$

と規定することにしよう。

ところで、組合せの総数には

$$\boxed{{}_nC_r = {}_{n-1}C_r + {}_{n-1}C_{r-1}}$$

のような関係も成り立っている。このことを説明してみよう。

$$\underbrace{\bigcirc\bigcirc\bullet\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bullet\bigcirc\cdots\cdots\bullet\bigcirc\bigcirc\,|\,\bigcirc}_{n\text{ 個から }r\text{ 個（}\bullet\bullet\cdots\bullet\text{）とる：}{}_nC_r} \qquad \underbrace{\bigcirc\bigcirc\bullet\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bullet\bigcirc\cdots\cdots\bullet\bigcirc\bigcirc}_{(n-1)\text{ 個から }r\text{ 個（}\bullet\bullet\cdots\bullet\text{）とる：}{}_{n-1}C_r}\ |\,\bigcirc$$

n 個から r 個とる総数 ${}_nC_r$ は、$(n-1)$ 個から r 個とる総数 ${}_{n-1}C_r$ より少ない。なぜなら、たとえば一番右の○を除外した $(n-1)$ から r 個とることを考えたら、一番右の○が選ばれることはないのだから、一番右の○を選ぶ場合の数の分だけ少ない。すると、その場合の数だけ ${}_{n-1}C_r$ に加えてやれば ${}_nC_r$ に等しくなるだろう。では、その場合の数はいくつだろうか。

$$\underbrace{\bigcirc\bigcirc\bullet\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bullet\bigcirc\cdots\cdots\bigcirc\bigcirc\bigcirc}_{(n-1)\text{ 個から }(r-1)\text{ 個（}\bullet\cdots\bullet\text{）とる}}\,|\,\bullet$$

それは、一番右を必ず選べばよいのだから、$(n-1)$ 個のグループからは $(r-1)$ 個とればよいことになる。それは ${}_{n-1}C_{r-1}$ である。

順列と組合せの一例

スポーツの大会などでは、いくつかの小グループで総当たり戦を行い、各グループの上位が決勝トーナメントに進出する形式をとることがある。具体的には、16 チームを 4 チームずつの 4 グループに分け、各グループの上位 2 チーム—つまり、計 8 チーム—が決勝トーナメントに進出するような場合である。シードがなく、完全に抽選でグループ分けがされるとしたら、何通りのグループ分けができるだろうか。

それには、順次 4 チームずつ抜き出していけばよいので、最初に抜き出す 4 チームは

$${}_{16}C_4 = \frac{16\cdot 15\cdot 14\cdot 13}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 1820\ (\text{通り})$$

だけ考えられる。C で計算しているのは、抜き出した 4 チームは同組になるだけで順番は無関係だからである。

次に抜き出す 4 チームは、残った 12 チームから選ばれるので

$${}_{12}C_4 = \frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 495\ (\text{通り})$$

だけある。

続けて 4 チームを抜き出そう。

$${}_{8}C_4 = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 70\ (\text{通り})。$$

すると最後に 4 チームが残るので、それで 1 通りである。

さて、最初に 4 チームの抜き出し方が 1820 通りあるのは分かったのだが、このおのおのに対して次の 495 通りの抜き出し方があることに注意しよう。つまり、ここには積の法則が当てはまる。したがって、グループ分けの総数は

$$1820\times 495\times 70\times 1 = 63063000\ (\text{通り})$$

などという、とんでもない数になった。が、実はこれは正解ではないのである。

理由は簡単だ。順列の計算をしているからである。最初の抜き出しには {A, B, C, D} の 4 チームが同組である場合は含まれているだろうし、{E, F, G, H} の 4 チームが同組である場合も含ま

れているだろう。もし、最初に {A, B, C, D} が同組になったら、次の抜き出しで {E, F, G, H} の 4 チームが同組になる場合はあるに違いない。また、最初に {E, F, G, H} が同組になったら、次の抜き出しで {A, B, C, D} の 4 チームが同組になる場合はあるに違いない。ちょっと待った。これらは同じ組み分けになってないか？　そう、さっき求めたとんでもない数は、いくつも重複して数えられているのである。

それでは重複はどれだけだろうか。それは 4 チームずつ抜き出しているところに順番がついてしまったわけだから、4! 通りが重複している。すなわち、正しいグループ分けの総数は

$$63063000 \div 4! = 2627625 \text{（通り）}$$

である。これでも、とんでもない数には違いないけど。

＊　＊　＊

この理屈がピンと来ないなら、A, B, C, D, E, F の 6 人を 2 人ずつ 3 グループに分けることを考えてみよう。間違った計算は

$${}_6C_2 \times {}_4C_2 \times 1 = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} \times \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 90 \text{（通り）}$$

である。そして正しい計算は、$90 \div 3! = 15$（通り）となる。このぐらいなら手作業で全部書き出せるだろう。

その際は、やはり辞書順を利用するのがよい。まず、A を含む 2 人組を考えると

$$\{A, B\}, \quad \{A, C\}, \quad \{A, D\}, \quad \{A, E\}, \quad \{A, F\} \qquad \text{（※）}$$

の 5 通りは重複していない。ということは、どの場合においても残りの 4 人には重複はないことになる。

たとえば {A, B} の組に対する残りは {C, D, E, F} の 4 人である。このとき C の相手を決めれば残る 2 人が自動的に決まることに注意すると、C を含む 2 人組は

$$\{C, D\}, \quad \{C, E\}, \quad \{C, F\}$$

の 3 通りである。すなわち

$$\{\ \{A, B\}, \{C, D\}, \{E, F\}\ \}, \quad \{\ \{A, B\}, \{C, E\}, \{D, F\}\ \}, \quad \{\ \{A, B\}, \{C, F\}, \{D, E\}\ \}$$

で、{A, B} が組になっている分け方を、重複や見落としなく書き出したことになる。

（※）において他の 4 通りについても同様に書き出せば、きちんと 15 通りの組み分けが書き出せるのである。▮