数えるための法則

私たちは折にふれてものを数えることをしている。会場に集まった人の数を数えたり、お金の勘定をするときなどは、しっかりした目的を持って数えるに違いない。

一方で、数ある選択の中から無意識にいくつかのものを選び出すこともある。たとえば来週の休みにどこかへ出かける際、雨が降れば手持ちの 3 本ある傘から 1 本を選び、雨が降らなければ 4 つある帽子から 1 つを選ぶものとする。このようなとき実際には、数えた 7 個の品物から 1 個の品物を無意識に選んでいることになる。

また、レストランで食事をするとき、メニューに載っている 8 種類の食べ物と 3 種類の飲み物を組み合わせて注文しようとすると、結局は 24 通りの組み合わせから好みのものを選んでいることになるだろう。

いま述べた 2 種類の数え方は基本的なもので、傘か帽子を選ぶ例は

> 同時に起こりえない 2 つの事柄 A、B があり、A の起こり方が m 通り、B の起こり方が n 通りあるとすれば、A、B のどれかが起こる**場合の数**は $(m+n)$ 通りである

という**和の法則**に則っている。また、メニューから食べ物と飲み物を選ぶ例は

> 2 つの事柄 A、B があり、A の起こり方が m 通りあり、そのおのおのの起こり方に対し、B の起こり方が n 通りあるとすれば、A、B がともに起こる場合の数は mn 通りである

という**積の法則**に則っている。

このような数え方は、3 つ以上の事柄についても同様に考えることができるのだが、ものの数え方はいつも和の法則や積の法則に従うわけではない。まず、いろいろな数え方について調べておこう。

順列

4 日続けて外出する際、手持ちの 4 個の帽子を日ごとに取り替えて出かけたい。日を追うごとに大きな帽子にしたいとか、後になるほど淡い色の帽子にしたいとなれば、おのずとかぶる順番は決まってしまう。そうではなく、4 日間の帽子が異なればとくに大きさや色にこだわらないとき、選択肢はどれだけになるだろうか。

初日は 4 個ある帽子から任意に選んでよい。つまり 4 通りの選択肢がある。2 日目は初日の帽子を除いて、3 個ある帽子から任意に選べる。つまり 3 通りの選択肢がある。3 日目は残った 2 個の

帽子のどちらかを選ぶだろう。選択肢は 2 通りだ。そして最終日は、最後の 1 個の帽子をかぶることになる。

帽子を A、B、C、D と区別した場合、初日は A でも B でも C でも D でも選べるのだが、かりに A を選んでも 2 日目は 3 通りの選択肢があり、B を選んだとしても 2 日目はやはり 3 通りの選択肢がある。このことは、初日に選ぶ帽子が A、B、C、D のどれであっても、2 日目の選び方は初日のおのおのに対して 3 通りあることを意味する。これは積の法則に則っている。したがって、4 個の帽子を日ごとに取り替えてかぶる場合の数は

$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24 \text{ (通り)}$$

であると結論づけられるのである。

もし、外出が 2 日間だけであれば、2 日目までの $4 \times 3 = 12$（通り）が可能な選択肢となる。

このように、異なる n 個のものから順番を加味して r 個並べたものを

$$\boxed{n \text{ 個から } r \text{ 個とる\textbf{順列}} := {}_nP_r}$$

といい、${}_nP_r$ で表す[1]。いまの例から分かるように

$${}_nP_r = \underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}_{r \text{ 個}}$$

という定義である。最後の因数が $(n-r+1)$ であることは、

$$\underbrace{n}_{1 \text{ 個}}、\quad \underbrace{n(n-\underline{1})}_{\underline{2}\text{個}}、\quad \underbrace{n(n-1)(n-\underline{2})}_{\underline{3}\text{個}}、\quad \underbrace{n(n-1)(n-2)(n-\underline{3})}_{\underline{4}\text{個}}、\quad \cdots$$

の系列から、$\underline{r}$ 個の積の最後の因数が $\{n-(\underline{r-1})\}$ であることが分かるだろう。

これより、4 個の帽子から 4 個全部を選び並べる順列が ${}_4P_4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ で、4 個の帽子から 2 個だけ選んで並べる順列が ${}_4P_2 = 4 \cdot 3 = 12$ であることが確認できる。とくに ${}_4P_4$ のように、n 個全部を並べる順列は

$${}_nP_n = n(n-1)(n-2)\cdots 1$$

であるから、n から 1 まで掛けきるときは、単に $n!$ と書くことが多い。記号 ! は “**階乗**（かいじょう）” と読む。すなわち

$$\boxed{{}_nP_n = n!}$$

[1] 記号 P は、順列（permutation）の頭文字。${}_nP_r$ は単に “$n\ p\ r$” と読むか、“*permutation* $n\ r$” と読む。

である。

$n!$ という書き方を取り入れると、${}_nP_r$ の計算は

$$ {}_nP_r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)\times(n-r)\cdots 1}{(n-r)\cdots 1} = \frac{n!}{(n-r)!} $$

と書けることになる。${}_nP_r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$ と書いた場合、$r=n$ ならば ${}_nP_n = \dfrac{n!}{0!}$ となって分母に $0!$ が現れる。しかし、$r=n$ のときは最初の定義より ${}_nP_n = n!$ であるから、$\dfrac{n!}{0!} = n!$、すなわち $0! = 1$ でないと具合が悪い。そこで、

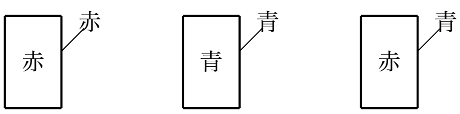
$$ \boxed{0! = 1} $$

と規定しておくことにする。

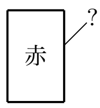
* * *

ものを数えることは意外に難しい。4 個の帽子ではなく、4 枚の 10 円玉を順に一列に並べることを考えてみよう。実際の 10 円玉は、製造年の違いや汚れ具合を考慮して 4 枚を異なるものとみなせば、${}_4P_4 = 24$（通り）の並べ方がある。しかし、同じ製造年の 4 枚を一列に並べたとしたら、汚れ具合が明らかに異なっていない限り 24 通りの区別をつけるのは難しいだろう。本来は異なる並べ方であっても、見た目の区別がつけられない場合は計算間違いを犯しやすいものである。

1 つ例を挙げよう。ここに、表と裏が



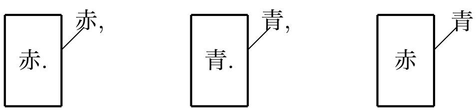
のように塗られたカードが 3 枚ある。この 3 枚のカードから任意に 1 枚を選んで机の上に置く。このとき、赤い面が見えていたとしたら、裏の色の可能性は何通りあるだろうか。



赤い面が見えているならば、このカードは両面とも青のカードでないことは明らかである。すると、両面が赤のカードか片面ずつ赤青のカードのどちらかになる。すると、裏の色は赤か青の 2 通りの可能性が考えられる。

もし、このように考えたなら、それは数え間違えをしている。正しい裏の色の可能性は、青か赤か赤の 3 通りである。赤を 2 回数えるのはおかしいと感じるかもしれないが、これが正しいことを説明しよう。

片面ずつ赤青のカードはシミひとつないきれいな色であるが、両面が同じ色のカードには、目を凝らさない限り見えないシミがあるとする。片面には “ . ” のシミが、もう片面には “ , ” のシミがある。つまり 3 枚のカードは、10 円玉に “表” と “裏” があるように

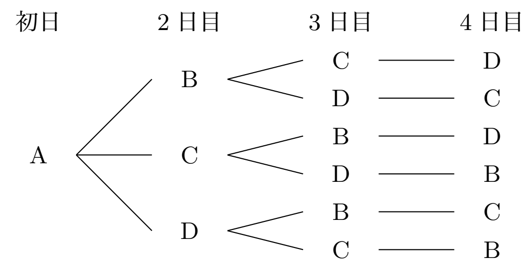


という区別がある。そしていま 1 枚のカードを取り出したところ、赤い面が見えているわけである。シミは目を凝らさないと見えないので、目の前にはシミのないきれいな赤いカードが見えていることになる。であれば、その面が “赤” なのか “赤.” なのか “赤,” なのか分からないだろう。したがって、裏は “青” なのか “赤,” なのか “赤.” なのか分からないことになる。よって、裏の可能性は青か赤か赤の 3 通りである。

もし、この説明で納得がいかないときは、自分でカードを用意してほしい。そして、袋にカードを入れてシャッフルしてから 1 枚取り出すことを何度か繰り返そう。取り出したカードが赤い面だったときは、大体 2 : 1 の割合で裏は赤のはずだ。取り出したカードが青い面だったときは、大体 2 : 1 の割合で裏は青のはずだ。■

樹形図

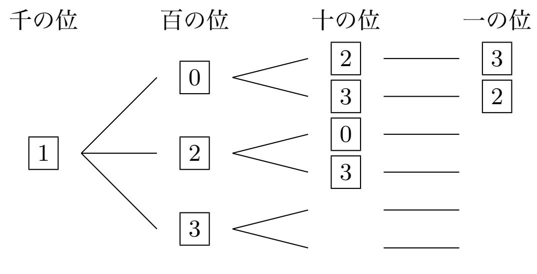
順列の計算は積の法則に従うが、具体的な順番を調べるには**樹形図**が有効である。4 個の帽子を 4 日間でかぶる例なら、樹形図の一部は



のようになる。初日が B、C、D の図も同様であるから、全部書き出せば総数 24 通りを一目で見渡せる樹形図が完成する。しかし、樹形図を描いて場合の数を数えるのは効率的ではない。むしろ樹形図は

問い： $\boxed{0}$, $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$ の 4 枚のカードを並べたとき、4 桁の数はいくつできるか。

という問題を考えるとき



と描き始めることで、千の位は 0 以外の 3 通りが使えるが、それ以降は 0 を含めてよいことに気づけば、残りの図は描かずに

$$3 \times 3 \cdot 2 \cdot 1 = 18\ (\text{個})$$

と、すぐに計算に持ち込めるのである。つまり、考え方の取っ掛かりを得るためにとりあえず樹形図を描くことは悪い方法ではない。