常用対数

私たちは日頃 10 進数を使っている。すなわち、$1, 10, 100, \ldots, 10^n, \ldots$ のように 10 を基本として、10 倍ごとに桁を進める方式である。これは底が 10 の指数関数にあたるので、対数関数も底を 10 とする $\log_{10} x$ を考えると便利なことが多い。底が 10 の対数を**常用対数**という。

対数の性質から $\log_{10} 1 = 0$、$\log_{10} 10 = 1$ なので、$\log_{10} 2$ や $\log_{10} 5$ は 0 と 1 の間の値であることは間違いない。それは、いくつであろうか。

たとえば $2^{10} = 1024$ であるから、$2^{10} \approx 1000 = 10^3$ と考えてみよう。すると両辺の常用対数をとることで

$$\log_{10} 2^{10} \approx \log_{10} 10^3$$

がいえるが、対数の性質からこの関係は

$$10 \log_{10} 2 \approx 3$$

に書き換えられる。両辺を 10 で割って $\log_{10} 2 \approx \dfrac{3}{10} = 0.3$ が分かる。一方で、

$$\log_{10} 2 + \log_{10} 5 = \log_{10}(2 \times 5) = \log_{10} 10 = 1$$

だから、$\log_{10} 2 \approx 0.3$ であれば $\log_{10} 5 \approx 0.7$ も分かるのである。

しかし、これは少々粗い近似であることは否めない。実際に対数の値をある程度の正確さで求めるには、たとえば**テイラー級数**などの式を用いて計算することになるのだろう。

常用対数表

いまでは、コンピュータで対数の値を即座に知ることができるのだが、計算機が出現するまでは対数の値を求めることは国家的事業であったことだろう。具体的に $\log_{10} x$ の値を知りたいとしても、x はいくらでも大きな値が考えられるので、任意の x の常用対数値を求めるのは容易ではないと思われる。しかし、たとえば $\log_{10} 123$ の値が知りたい場合は、

$$\log_{10} 123 = \log_{10}(1.23 \times 100) = \log_{10} 1.23 + \log_{10} 10^2 = \log_{10} 1.23 + 2$$

とすることができるので、$\log_{10} 1.23$ の値さえ分かればよいことになる。

あらゆる正数は $a \times 10^n$ $(1 \leqq a < 10)$ の形にできるから、実際は区間 $[1,\ 10)$ の対数の値が分かればよい。実務的に近似値でよければ $1.00 \leqq a \leqq 9.99$ までの、有効数字 3 桁の数—すなわち 900 個の数—についての常用対数値が分かる程度でよいのである。

そのために常用対数表が用意されていて、それは

真数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	.0000	.0043	.0086	.0128	.0170	.0212	.0253	.0294	.0334	.0374
1.1	.0414	.0453	.0492	$\cdots$						$\vdots$
1.2	.0792	$\cdots$		$\boxed{.0899}$						
$\vdots$	$\vdots$									
$\vdots$	$\vdots$									$\vdots$
9.9	.9956	.9961	.9965	.9969	.9974	.9978	.9983	.9987	.9991	.9996

のようなものである。表の縦に真数の有効数字 2 桁までが示され、有効数字の 3 桁めはその行を横にたどって見ることになっている。そのようにして見れば $\log_{10} 1.23 = 0.0899$ であることが読み取れるのである。よって

$$\log_{10} 123 = \log_{10} 1.23 + 2 = 2.0899$$

である。

*　*　*

常用対数表には 900 個の値が掲載されている。上の見本では $\log_{10} 1.21$ の値は省略してあるが、

$$\log_{10} 1.21 = \log_{10} 1.1^2 = 2\log_{10} 1.1 = 2 \times 0.0414 = 0.0828$$

であることが分かる。もっとも対数表の小数第 4 位は、小数第 5 位を四捨五入した数値であることが普通なので、表の値をたくさん使って加工するのは得策でない。とはいえ、いまのように計算できるのなら、表に 900 個もの値を載せる必要もない。では、どれだけ間引くことが可能だろうか。有効数字を 3 桁とすると、対数表の値 1.00 から 9.99 を 100 から 999 に変更しても本質は変わらないので、この中から間引けるものを探してみよう。

たとえば、$404 = 2^2 \times 101$ のように素因数分解できるものは、先の例同様に他の数を用いて値が求まるので、素因数分解できない数、すなわち素数についての対数表さえあればよい。しかし、$\log_{10} 404$ なら $\log_{10} 2$ の値が必要なように、100 未満の素数も表に記載されていなければならない。つまり、1000 未満の素数がすべて必要になる。1000 未満には素数は 168 個ある。したがって、常用対数表は 168 個の値があれば十分である。しかし、そのような対数表は決して便利とは言えないだろう。▮

常用対数の利用

単位は明らかにしないが、たとえば 100 単位分のお金を年率 3%の複利—つまり毎年 1.03 倍に金額が膨らむ割合—で借りるとしよう。5 年後の返済額がいくらかということなら、100×1.03^5 を

計算すれば済み、それが約 115.927 単位であることが直ちに分かる。ところが、何年後に 120 単位まで借金が膨らむかと問われれば

$$100 \times 1.03^x = 120$$

と解かなくてはならない。これは $1.03^x = 1.20$ を解くことなので、指数方程式であるが対数を用いて $x = \log_{1.03} 1.20$ を計算する必要がある。底が 1.03 では、手元の常用対数表は役に立たないと悲観することはない。対数は底を自由に変換できたことを思い出そう。よって

$$\log_{1.03} 1.20 = \frac{\log_{10} 1.20}{\log_{10} 1.03} \approx \frac{0.792}{0.128} = 6.1875$$

より、6 年と少しの年月で達することが分かるのである。

桁数について

対数で明らかになるのは指数の値である。具体的には a を既知の定数として、$2^x = a$ ならば両辺について底 2 の対数をとって、$\log_2 2^x = \log_2 a$ より $x = \log_2 a$ が分かる。また、$10^x = a$ ならば両辺について底 10 の対数をとって、$\log_{10} 10^x = \log_{10} a$ より $x = \log_{10} a$ が分かる。このように考えると、a^x の x を知りたいときは $\log_a$ を使わなければならないように感じてしまうのだが、実際はどんな底に対しても $\log_{10}$ を使ってかまわない。

それは底の変換がいつでも可能であるというより、私たちは 10 進数をもとに計算を行うので、$\log_{10}$ を使って求める値は大きな意味を持っているからである。大きな意味とは、$\log_{10} x$ の値が数 x の桁数を求めることになるからである。たとえば、適当に 3 桁の数を選んで小さい順に並べてみよう。

$$100, \quad 256, \quad 365, \quad 611, \quad 720, \quad 999\ .$$

これらは

$$1.00 \times 10^2, \quad 2.56 \times 10^2, \quad \ldots, \quad 9.99 \times 10^2\ .$$

と書ける。常用対数をとれば 1.00×10^2 は

$$\log_{10} 1.00 \times 10^2 = \log_{10} 1.00 + \log_{10} 10^2 = 0 + 2$$

であるから、これに倣ってすべての数を表すと

$$0 + 2, \quad 0.4082 + 2, \quad 0.5623 + 2, \quad 0.7860 + 2, \quad 0.8573 + 2, \quad 0.9996 + 2\ .$$

である。すなわち、3 桁の数は常用対数によって 2.xxxx という数になることが分かる。要するに、常用対数値が N.xxxx となる数は $(N+1)$ 桁の数ということである。一般に

$$\boxed{\log_{10} A = x \text{ のとき、} A \text{ の桁数は } \lfloor x \rfloor + 1 \text{ である}}$$

といえる。$\lfloor x \rfloor$ は**床関数（フロア関数）**と呼ばれ、x 以下の最大の整数を表す関数と定義されている。簡単に言えば、小数点以下を “切り捨てる” 関数であるのだが、x が負の値のときは誤解されやすい表現であるから注意をしておきたい。$\lfloor -3.14 \rfloor \neq -3$ である。切り捨ては簡単に言うための便宜的な言い方であるから、定義に従えば $\lfloor -3.14 \rfloor = -4$ が正しい。このことは数値を見て考えるより、数直線上で考えた方が分かりやすいだろう。ぜひ、数直線上の数を例に考えてもらいたい。

ちなみに、x 以上の最小の整数を表す関数は $\lceil x \rceil$ で表し、**天井関数（シーリング関数）**という。これも簡単に言えば小数点以下を “繰り上げる” 関数であるのだが、負の値に使うときは言葉遣いに注意がいるだろう。

*　*　*

対数で求められる桁数は、言わば精密な桁数である。上の例に与えた数値を見ると、100 の常用対数値がちょうど 2 であり、それが 3 桁の数の始まりである。また 999 の常用対数値が 2.9996 であり、それが 3 桁の数の終わりである。このことから、小数点以下の数値が大きくなるほど 3 桁の数の終わりに近づくことが分かる。「この数は 2.5623 桁の数である」と言うことはないが、常用対数値が 2.5623 であれば、おそらく 3 桁の数の中ほどにあたるであろうと想像することができる。しかし常用対数値が 2.5623 である数は 365 であったので、正確な位置を示すものではないが、精密な桁を表していることには変わりないだろう。

もっとも、桁数は精密に表す必要などないから整数値で言うのである。フロア関数はそのために最適である。一昔前までは、$\lfloor x \rfloor$ は $[x]$（ガウス関数）で表したものであるが、$\lfloor x \rfloor$ と $\lceil x \rceil$ を対にして使う方が便利なので、近頃はこちらの表記をよく目にする。

蛇足ながら、$\lfloor x+1 \rfloor \neq \lceil x \rceil$ であることを指摘しておこう。

$$\lfloor 3.14+1 \rfloor = \lceil 3.14 \rceil = 4\text{、}\quad \lfloor -2.7+1 \rfloor = \lceil -2.7 \rceil = -2$$

などの例を見れば $\lfloor x+1 \rfloor = \lceil x \rceil$ ではないかと思ってしまいがちである。しかし、x が整数のときは

$$\lfloor 3+1 \rfloor = 4;\ \lceil 3 \rceil = 3\text{、}\quad \lfloor -2+1 \rfloor = -1;\ \lceil -2 \rceil = -2$$

であるから、$\lfloor x+1 \rfloor$ は $\lceil x \rceil$ に等しくない。ちなみに

$$\lfloor x+1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1\text{、}\quad \lceil x+1 \rceil = \lceil x \rceil + 1$$

は正しい関係式である。▮