対数関数

対数について一通り理解が進んだところで、対数関数について考えよう。対数関数は、指数関数を $y=a^x$ としたときの $x=\log_a y$ のことであるから、指数関数の逆関数のことである。指数関数は底 a が 1 より大きいか小さいかで扱いが少々異なったので、対数関数でも a の値で扱いを変えなくてはならない。

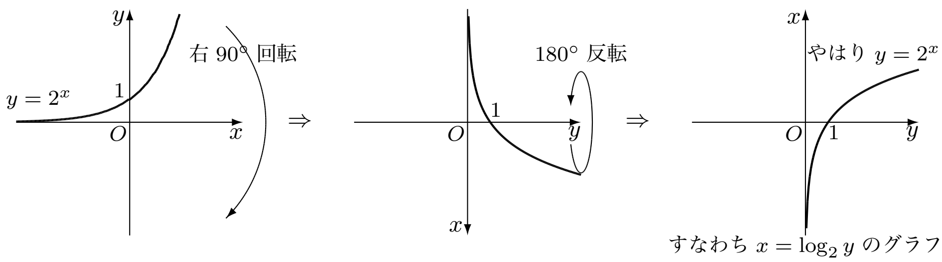
では、具体的に $a>1$ の例として $y=\log_2 x$ を、$0<a<1$ の例として $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ について考えることにしよう。

対数関数のグラフ

関数のグラフを描く場合は、x, y の対応を表にして点を打つのが簡単でよい。しかしここでは、対数関数が指数関数の逆関数であることを利用して描いてみよう。

まず、逆関数とは何であろう。それは、$y=f(x)$ の逆関数が $x=g(y)$ となることから、x と y の役割を入れ替えたものになっている。いまはグラフを描くことが目的なのだから、x と y の役割を入れ替えることができればよい。それには新たにグラフなど描く必要はなく、単に x 軸と y 軸を入れ替えるだけである。

実際に、$y=2^x$ のグラフをもとにして $y=\log_2 x$ のグラフを描いてみよう。

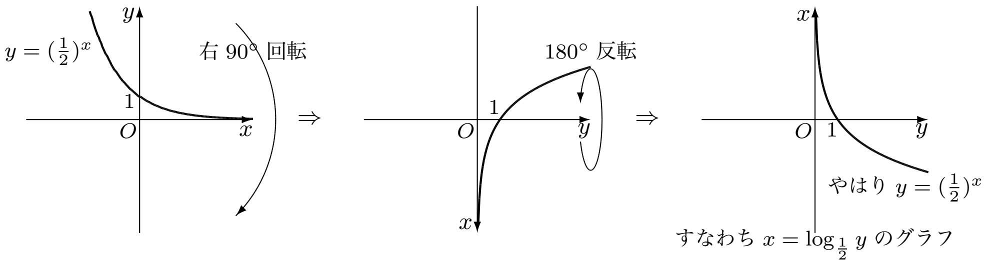


x と y の役割を替えるには 2 段階の操作を行う。はじめに座標軸を右に 90° 回転させる。すると、横軸が y 軸になるのだが、縦軸の x 軸は上下逆になってしまう。そこで、横軸を回転軸として 180° 反転させよう—裏返しと言った方が分かりやすいかもしれない。これで、x 軸と y 軸が入れ替わって新たなグラフが見える。しかし、いま行ったことはグラフを見る位置を変えただけで、x と y の関係が変わったわけではないことに注意しよう。よって、見えているグラフはやはり $y=2^x$ である。

ところで、指数関係 $y=2^x$ と同値な対数関係は $x=\log_2 y$ である。したがって、見えているグラフは $x=\log_2 y$ ということになる。しかし私たちは習慣として、横軸を x 軸、縦軸を y 軸と見ているので、文字の使い方を交換すれば、これが $y=\log_2 x$ のグラフということになるのである。

対数関数は、$y=\log_a x$ の底が 1 より大きければ、グラフは基本的に $y=\log_2 x$ と同じである。すなわち、単調増加関数であり、x 軸—つまり横軸—の $(1,\ 0)$ を通り、y 軸が漸近線である。

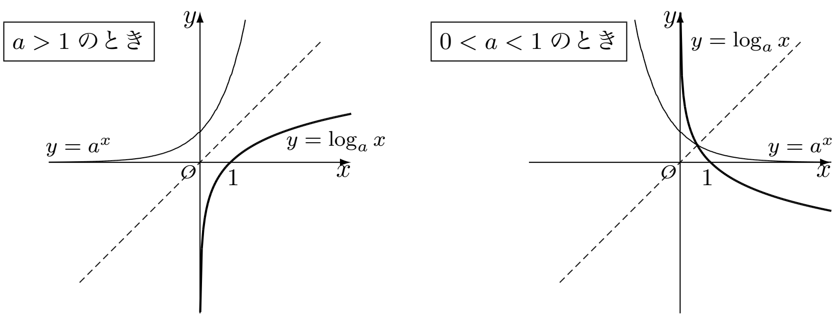
同じことを $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ で行ってみよう。



グラフを見て分かるように、指数関数は $a>1$ のグラフと $0<a<1$ のグラフが y 軸対称であったのに対し、対数関数はそれぞれのグラフが x 軸対称になっている。

対数関数の特徴

対数関数のグラフについてまとめておこう。



対数関数は底の値によって、単調増加もしくは単調減少となっている。また、必ず点 $(1,\ 0)$ を通る。このことは $\log_a 1=0$ であることを意味している。対数関数は指数関数の逆関数であることから、互いに $y=x$ について対称である。$y=x$ について対称な点は、互いに $(a,\ b)$ と $(b,\ a)$ の位置にあるので、同時に x 座標と y 座標の値が交換されていることも分かる。

* * *

指数関数 $y=a^x$ を考えたとき $a>0$、$a\neq 1$ を条件としたので、対数関数 $y=\log_a x$ も $a>0$、$a\neq 1$ が条件である。指数関数において $a\neq 1$ としたのは、$a=1$ とすると x の値によらず $y=1$ となることが理由

であった。しかし、このことは本当の理由ではないのである。なぜなら定値 a をとる関数 $y=a$ は立派に関数として扱えるので、排除する必要はないからだ。本当の理由は、$y=\log_a x$ で $a=1$ とすると $a^y=x$、すなわち $1^y=x$ となる y を求めることになって、任意の x について解を持たない。つまり $a=1$ の指数関数 $y=a^x$ は意味があっても、対数関数 $y=\log_a x$ は意味を持たないからである。要するに、逆関数との整合性から $a\neq 1$ を条件としたのである。そのため、とくに整合性を重視しなければ、指数関数の底に必要な条件は $a>0$ だけでかまわない。▮

対数方程式

対数の話の中で指数方程式の話を持ち出すのは妙な気がするかもしれない。実際、方程式 $2^x=8^{x+1}$ は、$2^x=2^{3(x+1)}$ とすれば、単に指数を比較して $x=3(x+1)$ を解けばよいので、$x=-\dfrac{3}{2}$ がすぐ分かった。しかし、底が異なるとそうはいかない。

$2^x=3^{x+1}$ を解くとすると、両辺の、たとえば底を 2 とする対数をとってから

$$\begin{aligned}
\log_2 2^x &= \log_2 3^{x+1} && \text{(両辺の対数をとった)}\\
x\log_2 2 &= (x+1)\log_2 3 && \text{(対数の性質 II から)}\\
x &= x\log_2 3+\log_2 3 && \text{(対数の性質 I から、および分配法則)}\\
x(1-\log_2 3) &= \log_2 3 && \text{(移項してまとめた)}\\
x &= \frac{\log_2 3}{1-\log_2 3} && \text{(x の係数で割った)}
\end{aligned}$$

とすればよい。正確に解が求められたことに対数のありがたみを覚えるだろうが、それではこの値がどの程度かと問われると返答に窮するかもしれない。もちろん $\sqrt{3}$ の近似値が分かっているように、$\log_2 3$ の近似値も分かる。$\log_2 3\approx 1.585$ である。したがって x の値は、およそ -2.7 であることが分かる。対数の近似値については、後で述べることにしよう。

ここでは指数方程式の底が異なる場合に、それを対数不等式に直して解く例を示した。しかし実際は、指数方程式を解くために対数—しかも意識的に底が同じ対数—を用いることができたので、本当の意味での対数方程式と言えないかもしれない。

では本当の意味の、底が異なる対数方程式はどのように解けばよいかと言われると、それは特別な場合を除いて難しいのである。特別な例として

$$\log_2 x=\log_4(3x-1)\quad\text{(※)}$$

を解くことにすると、底の変換をすることで

$$\begin{aligned}\log_2 x &= \frac{\log_2(3x-1)}{\log_2 4} && \text{（底 2 の対数で変換した）}\\ 2\log_2 x &= \log_2(3x-1) && \text{（$\log_2 4 = 2$ として両辺に掛けた）}\\ \log_2 x^2 &= \log_2(3x-1) && \text{（対数の性質 II から）}\end{aligned}$$

のように、底が同じ対数の方程式に直すことができる。すると、方程式は真数の比較で済み、結局 $x^2 = 3x - 1$ を解の公式を用いて解いて、$x = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ を求めることができる。しかし解は※において 真数 > 0 を満たさなくてはならない。それは $x > \dfrac{1}{3}$ である。求めた解は $x > \dfrac{1}{3}$ を満たすので、2 つとも正しい解である。

※が特別な場合であったのは、底の変換によって $\log_2 4 = 2$ となったことであり、そのことが 2 次方程式を解けばよいことにつながっている。そうでなければ、x の次数が整数どころか無理数になってしまい、近似値計算でもしない限り解けないのである。

対数不等式

対数が不等式の形になっている場合、たとえば

$$\log_2 2x > \log_2(3x-1)$$

のようなときも、底が 1 より大きいか小さいかに注意できれば、単に真数を比較して

$$2x > 3x - 1 \quad \text{より} \quad x < 1$$

がすぐ分かる。しかし、これは正しい解ではない。なぜなら、対数は真数が正であることが条件であるから、それぞれの真数について

$$2x > 0、\quad 3x - 1 > 0$$

が満たされなくてはならない。したがって、これらをすべて考慮して $\dfrac{1}{3} < x < 1$ を解としなくてはならないのである。