方程式の解

たとえば方程式 $x^3 = 2$ を解くとき、方程式を満たす x を整数もしくは整数比で表すことはできない。そこで、この場合は新たに記号 $\sqrt[3]{}$ を用いて、$x = \sqrt[3]{2}$ と記述したのであった。記号の意味としては、同じ数が繰り返し掛けられたということで $\sqrt{}$ を、繰り返しが 3 回であったということで ^{3} が明示されている。

指数に未知数を含む方程式、$3^x = 2$ についても事情は同じである。この場合も x を整数もしくは整数比で表すことはできないので、数が何乗されたかということと、その数が何であったかということが明示された記号が必要である。何乗されたかという意味で log を、底に与えた数—この例では 3 —を示すために $_3$ を使うことにし、それらを合わせた記号 $\log_3$ を用いて

$$3^x = 2 \quad \Longrightarrow \quad x = \log_3 2$$

と書くことにする。$\log_3 2$ は「ログ 3 2」と、機械的に読むことが多い[1]。意味を織り込むなら、$\log_3 2$ は「3 を 2 にするための指数」とでも読めばよいだろうか。

対数

一般に

$$\boxed{a^m = M \quad \Longleftrightarrow \quad m = \log_a M}$$

という関係になっている。このとき m を **a を底とする M の対数**という。指数関係のときと同じく、a は対数で用いても底と呼ぶことに変わりない。また、指数関係のときは m, n は正の整数を表す文字、r, s は有理数を表す文字、などと区別したが、この先 m などの文字はすべて実数と思って差し支えない。

さて、M は**真数（しんすう）**と呼ぶ。さらに、指数関数では $a > 0$ かつ $a \neq 1$ であったので、対数関係においても $a > 0$ かつ $a \neq 1$ を受け継いでいる。そして、指数関数のグラフからも分かるように、常に $M > 0$ であるから、対数関係においても真数 M は常に $M > 0$ を満たしている。

対数の感覚を身につけるためには、慣れる以外に方法はないので、たとえば $2^3 = 8$ から $3 = \log_2 8$ がすぐに思い浮かぶように訓練する必要がある。また単に $\log_2 8$ を見たとき、「$2^{\square}$ を 8 にするための指数」と読んで、$\log_2 8 = 3$ を見つけるのもよいかもしれない。そのようにしておくと、たとえ

[1] log は logarithm の略。

ば $\log_2 7$ を見たとき、2 を 7 にする指数として 3 を候補にすると 8 になってしまうので、3 よりやや小さな数— 2.9 か 2.8 ぐらいだろうか—が想像できる。これは、$\sqrt{8}$ が $\sqrt{9}=3$ と比較して、2.9 か 2.8 ぐらいと考える感覚に近いだろう。

対数の性質 I

対数関係の等式において、左辺と右辺をそれぞれ入れ替えて

$$M = a^m \quad \Longleftrightarrow \quad \log_a M = m \quad (\bigstar)$$

と見直して、★の左側の等式を右側の等式に代入すれば直ちに

$$\boxed{\log_a a^m = m}$$

という関係が得られる。これはたとえば、$\log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$ と計算できることを指している。

また、指数の性質に $1 = a^0$ があった。これを★の右側の関係に置き換えれば

$$\boxed{\log_a 1 = 0}$$

である。すなわち、真数が 1 であれば対数の値は無条件に 0 になるということである。

そして、ひどく当たり前のことだが、$a = a^1$ を★の右側の関係に置き換えれば

$$\boxed{\log_a a = 1}$$

である。すなわち、底と真数が同じ数であれば対数の値は無条件に 1 になるということである。

*　　*　　*

上の関係式は、互いに同値関係にあるものを代入し合っているので、結果的に堂々巡りをしている気になるだろうし、実際、堂々巡りに近いことをしているのである。たとえば

$$a = \sqrt{A} \quad \Longleftrightarrow \quad a^2 = A$$

の左側の等式を右側の等式に代入すれば、$\sqrt{A}^2 = A$ である。この関係は当たり前のように使っていることだろうが、$\sqrt{\ }$ と指数の 2 が互いに打ち消し合うような関係にあることは、このような操作をして初めて分かることなのである。▮

対数の性質 II

対数は指数関係の中から指数を取り出したものであるから、指数法則の中で指数にまつわる性質がそのまま対数にも受け継がれている。たとえば指数法則では $a^m \times a^n = a^{m+n}$ が成り立ったの

で、$a^m = M$、$a^n = N$ とおけば

$$MN = a^{m+n} \qquad \text{および} \qquad m = \log_a M、n = \log_a N$$

と書ける。$MN = a^{m+n}$ を対数関係の式にすれば

$$m + n = \log_a MN$$

であるが、$m = \log_a M$、$n = \log_a N$ と書けたので、結局

$$\boxed{\log_a M + \log_a N = \log_a MN}$$

がいえたことになる。同様に、$\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ を $\dfrac{M}{N} = a^{m-n}$ と見て、それを対数関係に直した $m - n = \log_a \dfrac{M}{N}$ より

$$\boxed{\log_a M - \log_a N = \log_a \frac{M}{N}}$$

が導ける。指数法則では、数の積・商が指数の和・差になったことを覚えているだろう。対数においては真数の和・差が対数の積・商になったことに注目しておきたい。

続けて指数法則の $(a^m)^k = a^{mk}$ を利用してみよう。$a^m = M$ とおいたので $(a^m)^k = a^{km}$ は $M^k = a^{km}$ と書ける。指数と対数の関係より

$$M^k = a^{km} \quad \Longleftrightarrow \quad km = \log_a M^k$$

である。よって、右側の等式に $a^m = M$ を対数で表した $m = \log_a M$ を代入して

$$\boxed{k \log_a M = \log_a M^k}$$

が成り立つことが分かる。数のべき乗が単に対数の積になっていることに注意しよう。★から得られた性質 $\log_a a^m = m$ は、この関係を用いて

$$\log_a a^m = m \log_a a = m$$

としたものでもある。

ところで $a^m = M$ とおいたのだが、$m = \log_a M$ だから

$$\boxed{a^{\log_a M} = M}$$

という性質もある。当たり前の式かもしれないが、重要な関係でもある。

底の変換

$A = B$ であれば両辺を対数に直した $\log_c A = \log_c B$ も成り立つので、$a^x = b$ ならば $\log_c a^x = \log_c b$ である。左辺に対数の性質を用いて

$$x \log_c a = \log_c b \quad より \quad x = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

が得られる。$a^x = b$ ならば $x = \log_a b$ なのだから、このことから

$$\boxed{\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}}$$

が成り立つ。この関係は**底の変換**と呼ばれ、対数の底を任意の底に変えることができるものである。とくに $c = b$ とすると、分子は $\log_b b = 1$ となって

$$\boxed{\log_a b = \frac{1}{\log_b a}}$$

がいえる。底と真数の交換が逆数の関係になっていることに注意されたい。