指数関数とグラフ

指数を用いていろいろな数を表すとき、最終的に指数は実数でもよく、さらに指数法則が成り立つことが確認できた。これは大変重要な事実で、指数関係にあるものを**連続関数**で扱えることを意味する。一般に

$$y = a^x \quad （ただし\ a > 0、かつ\ a \neq 1）$$

を**指数関数**という。$a < 0$ であっても x の値によっては y を決めることができるのだが、それだと付随する条件が多岐にわたってしまい、関数としての振る舞いを十分に調べられなくなってしまう。単に計算をするだけならよいのだろうが、関数を考える場合は $a > 0$ である方が都合がよい。また $a = 1$ のときは、x とは無関係に $y = 1$ となるから、特別に指数関数を考える必要がないので除いておく。a を指数関数の**底（てい）**と呼ぶのは従来通りである。

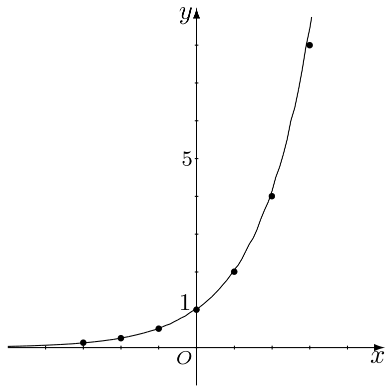
では、指数関数がどのような変化をするか、具体的に底を 2 として

$$y = 2^x$$

を調べてみよう。このようなときは、x に順に$\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$を代入するのが簡単でよい。実際

x	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$
y	$\cdots$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	$\cdots$

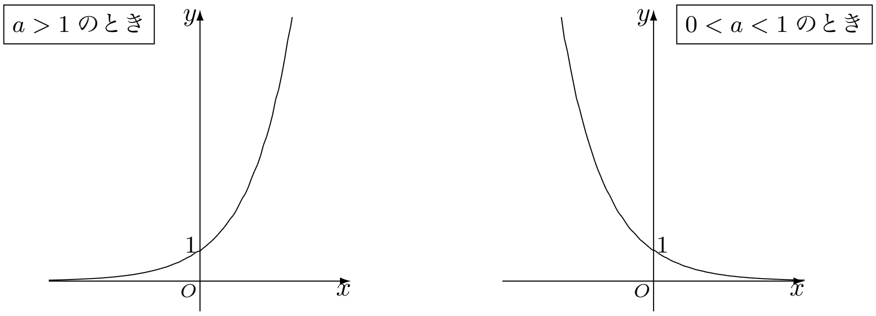
であることと、2^x が増加関数であることから、グラフは



のように描くことができる。$x \to -\infty$ の状況はどうなっているかというと、n を正の整数として $x = -n$ を考えてみると、$2^x = \dfrac{1}{2^n}$ であり、$2^n > 0$ であることから、グラフが x 軸の下にくることはない。すなわち、x 軸が $y = 2^x$ の**漸近線（ぜんきんせん）**となっている。

$y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ の場合はどうだろう。この場合も x、y の対応表を作ればよいのだが、ここは $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$ であることを利用したい。つまり $y = 2^{-x}$ は、$y = 2^x$ の定義域 x の正負が逆になっているだけなので、グラフは y 軸対称となる。したがって、即座に x 軸を漸近線とする減少関数であることが分かる。

他にいくつかの a の値で試せば容易に分かるように、$y = a^x$ は $a > 0$ と $0 < a < 1$ でグラフの形状が違う。

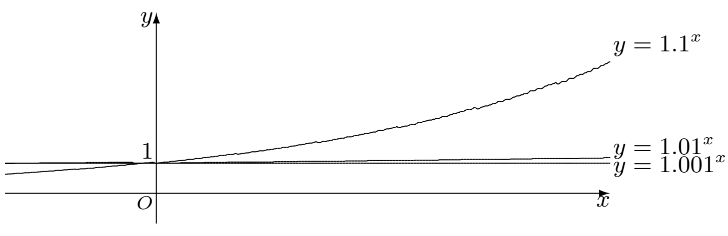


$a > 1$ のときの a^x は、次々1 よりも大きな値を掛けることに相当するので、x が大きいほど y は大きな値になる。$0 < a < 1$ のときというのは、$a > 1$ のときに a^{-1} を考えることに他ならないので、それは a^{-x} である。これが y 軸対称であることは見た通りである。

共通する点は、y 軸上の $(0,\ 1)$ を通り、x 軸を漸近線とする単調増加または減少関数であることである。$a = 1$ の場合は考えないことにしたが、実際は $y = 1$ である指数関数と考えても問題ない。

*　　*　　*

$y = a^x$ $(a > 1)$ において、$a = 1.1, 1.01, 1.001, \ldots$ として、$y = 1.1^x$, $y = 1.01^x$, $y = 1.001^x$, $\ldots$ を考えてみよう。このグラフは



となっていて、$a \to 1$ の極限が $y = 1$ になる様子が見えるだろう[1]。a が 1 に近ければ、a を何乗しても 1 に近い値であることは想像できることではあるが、そのことを感覚ではなく数式で表してみたい。

そのために x の整数値だけに注目することにし、$1.0\cdots01$ は $1 + \alpha$ で表すことにしよう。すると $y = a^x$ は $y = (1+\alpha)^n$ と書ける。**二項定理**より

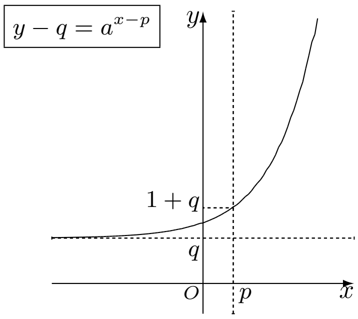
$$y = (1+\alpha)^n = 1 + {}_nC_1\alpha + {}_nC_2\alpha^2 + \cdots + \alpha^n$$

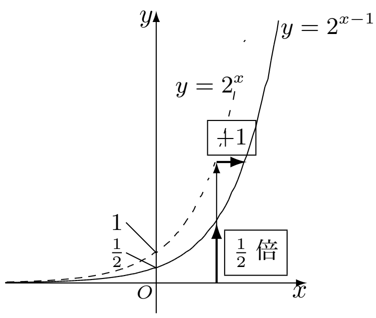
[1] グラフが乱れているのは tmtmath.sty のせいである。

だから、$\alpha \to 0$ のとき明らかに $y=1$ となることが分かる。この場合 $\alpha < 0$ であっても、$\alpha \to 0$ のとき明らかに $y=1$ がいえる。$\alpha < 0$ というのは、$y=0.9^x$, $y=0.99^x$, $y=0.999^x$, $\ldots$ の系列を意味するので、すなわち $0<a<1$ の場合も同時に示せたことになる。▮

指数関数の特徴

どんな関数にも言えることであるが、x を $(x-p)$ に、y を $y-q$ に置き換えると、関数のグラフは $(p,\ q)$ が原点になったように平行移動される。しかし、指数関数は y 軸方向へ平行移動されても、x 軸方向には平行移動されないと考えてもよいのである。





たとえば $y=2^{x-1}$ は $y=2^x$ を x 軸方向に 1 だけ平行移動したグラフになる。しかしこれは $y=2^x\cdot 2^{-1}=\dfrac{1}{2}\cdot 2^x$ と見れば、$y=2^x$ を $\dfrac{1}{2}$ 倍したものであるから、y 軸方向に少し縮めたグラフということになる。

一般に、$y=a^{x-p}=a^{-p}a^x$ であるから、x 軸方向へ p だけ平行移動することは、y 軸方向に a^{-p} 倍することと同じなのである。

指数方程式

指数方程式は、指数に未知数を含む方程式である。ここでは簡単に $2^x=8^{x+1}$ を解くに止める。このような方程式は底をそろえれば済むことなので

$$\begin{aligned} 2^x &= 8^{x+1} \\ 2^x &= 2^{3(x+1)} \\ x &= 3(x+1) \text{ より、} x=-\frac{3}{2} \end{aligned}$$

である。底がそろえば、方程式は単に指数の比較であるから簡単に解けるのである。

指数不等式

　等号を不等号に変えれば不等式になるので、たとえば $2^x > 8^{x+1}$ は、$2^x > 2^{3(x+1)}$ の指数を比較して、$x > 3(x+1)$ から $x < -\dfrac{3}{2}$ が分かる。ただし、常にこれでよいわけではない。この指数不等式は底が 2 であり、底 > 1 を満たしている。この場合、指数関数は単調増加であるから、$2^a > 2^b$ ならば $a > b$ が成り立っている。しかし

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{8}\right)^{x+1} \qquad (☆)$$

では勝手が違う。不等式は $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x > \left(\dfrac{1}{2}\right)^{3(x+1)}$ であっても、$0 <$ 底 < 1 の指数関数は単調減少であるから、指数の大小関係は逆に $x < 3(x+1)$ である。よって、$x > -\dfrac{3}{2}$ が解となる。

　もし、このようなことを見逃しやすいとしたら、☆は

$$2^{-x} > 8^{-(x+1)}$$

と見ればよい。これなら不等号の向きをそのまま指数にあてがい、$-x > -3(x+1)$ を解けばよいからだ。もちろん解は $x > -\dfrac{3}{2}$ である。