拡張された指数法則

指数が正の整数のときに成り立つ指数法則は、指数を有理数にしても成り立つ。それは、$a>0$、$b>0$、r と s を有理数として

$$\boxed{a^r\times a^s=a^{r+s}、\qquad \frac{a^r}{a^s}=a^{r-s}、\qquad (a^r)^s=a^{rs}、\qquad (ab)^r=a^rb^r}$$

が成り立つことをいう。r、s が整数のとき正しい式だからといって、有理数のときも正しいことにはならない。このことはきちんと証明されなければならないのである。

$r=\dfrac{h}{k}$、$s=\dfrac{p}{q}$ として、$a^r\times a^s=a^{r+s}$ だけ示すことにしよう。もちろん、h、k、p、q は整数である。これは累乗根の性質を適宜用いて証明するとよいが、計算の都合上、r と s は分母を通分し、改めて $r=\dfrac{hq}{kq}=\dfrac{m}{n}$、$s=\dfrac{kp}{kq}=\dfrac{l}{n}$ で表しておく。すると

$$\begin{aligned}
a^r\times a^s &= a^{\frac{m}{n}}\times a^{\frac{l}{n}} && (r=\tfrac{m}{n}、s=\tfrac{l}{n}\text{より})\\
&= \sqrt[n]{a^m}\times\sqrt[n]{a^l} && (\text{累乗根の表記の定義})\\
&= \sqrt[n]{a^m\times a^l} && (\text{累乗根の性質})\\
&= \sqrt[n]{a^{m+l}} && (\text{指数法則})\\
&= a^{\frac{m+l}{n}} && (\text{累乗根の表記の定義})\\
&= a^{\frac{m}{n}+\frac{l}{n}}=a^{r+s} && (\tfrac{m}{n}=r、\tfrac{l}{n}=s\text{ より})
\end{aligned}$$

のように、指数法則が使えることが確かめられる。

指数が実数のとき

指数に有理数が記述できることで、指数法則の自由度がだいぶ増したと感じるだろう。n 乗や n 乗根には整数以外の n は考えられないので、指数に用いる数は有理数まででとなる。しかしこの先、指数関数にまで考えを広げた場合、有理数以外の実数が使えないと困るのである。ただし、指数に有理数でない実数を使った場合、そこには n 乗や n 乗根の意味はなくなってしまう。それでも指数の定義をすべての実数に広げておくことは、関数を途切れ途切れにさせない点で大変重要なのである。

では、たとえば $a^{\sqrt{2}}$ はどのように定義するとよいだろうか。$\sqrt{2}$ は無理数だから整数の比にできない。しかし $\sqrt{2}$ を、たとえば

$$1.4,\ 1.41,\ 1.414,\ 1.4142,\ 1.41421,\ 1.414213,\ \ldots \quad (※)$$

の極限、すなわち

$$\frac{14}{10},\ \frac{141}{100},\ \frac{1414}{1000},\ \frac{14142}{10000},\ \frac{141421}{100000},\ \frac{1414213}{1000000},\ \cdots$$

の極限と見れば、$a^{\sqrt{2}}$ は

$$\sqrt[10]{a^{14}},\quad \sqrt[100]{a^{141}},\quad \sqrt[1000]{a^{1414}},\quad \sqrt[10000]{a^{14142}},\quad \sqrt[100000]{a^{141421}},\quad \sqrt[1000000]{a^{1414213}},\ \ldots$$

の極限値となる。問題は、この数列が一定の値に収束するかどうかである。

数列が収束することは次のように考えるとよい。まず※の作り方は、小数点以下の先の位へ 1 つずつ数字を付け加えている。このとき、付け加える数字がある時点からすべて 0 になることはないことに注意する。なぜなら、もしある時点から先の数字がすべて 0 なら、$\sqrt{2}$ は有理数ということになって、無理数であることに矛盾してしまう。したがって、※の第 i 項 r_i と第 $i+1$ 項 r_{i+1} を比べたとき、付け加える数が 0 でない限り $r_i < r_{i+1}$ になっている。このとき、

$$r_i = \frac{1414\cdots m}{10^i}、\qquad r_{i+1} = \frac{1414\cdots mn}{10^{i+1}}$$

と表すことにすると、r_i の分母を 10^{i+1} に通分して r_i と r_{i+1} の大きさを比較すると、明らかに

$$r_i = \frac{1414\cdots m0}{10^{i+1}} \quad < \quad r_{i+1} = \frac{1414\cdots mn}{10^{i+1}}$$

であるから、この値を指数に用いた a^{r_i} と $a^{r_{i+1}}$ を書き直してみると、

$$a^{r_i} = \sqrt[10^{i+1}]{1414\cdots m0}、\qquad a^{r_{i+1}} = \sqrt[10^{i+1}]{1414\cdots mn}$$

となって、たしかに $a^{r_i} < a^{r_{i+1}}$ になっている。なぜなら a^{r_i} と $a^{r_{i+1}}$ を共に 10^{i+1} 乗すると、$a^{r_{i+1}}$ が n の分だけ大きいので、10^{i+1} 乗する前—すなわち 10^{i+1} 乗根—も $a^{r_{i+1}}$ がわずかに大きいと言えるからである。すると $\sqrt{2}$ は増加数列である。しかも r_i は $1.4\cdots$ だから間違いなく $r_i < 2$ である。このことは、a^{r_i} は増加し続けるが a^2 を超えない—すなわち数列 $\{a^{r_i}\}$ は**上に有界**である—ことを意味する。結局

上に有界である増加数列は収束する

という定理によって、$a^{\sqrt{2}}$ は一定の値に収束すると言えるのである。

*　　*　　*

たとえば $2^{\sqrt{2}}$ が理屈の上で収束するといっても、実感がわかないであろう。Microsoft Excel でその様子を見てみよう。Excel の精度から $\sqrt{2}$ の近似値は 1.4142135623731 程度で十分であろう。

◇	A	B	C	D	E	F
1	r	2^r				
2	1	(* B2)				
3	1.4	↓下へコピーする				
4	1.41	↓				
5	1.414	↓				
6	1.4142	↓				
7	1.41421	↓				
8	1.414213	↓				
9	1.4142135	↓				

※ セルの式
(B2)　=2^A2

A 列に 1 桁ずつ増加する値を入力するのは面倒であるが、このようにすれば一定の値に近づくことが分かりやすい。例はもう少し先でセルの値が変化しなくなって、一定の値に収束する様子が見えるだろう。真の値は、どこかのセルに "=2^SQRT(2)" と入力すれば即座に分かる。▮

$a^0 = 1$ について

さて、指数計算においては $m = n$ のとき $\dfrac{a^m}{a^n} = 1$ であった。このことを指数法則を使って表すと

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} = a^0 = 1$$

であるから $a^0 = 1$ がいえることはすでに述べたが、ここには罠が潜んでいるのである。

まず、$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ の記述を思い出してほしい。これは分母に a が含まれていることから、$a \neq 0$ は隠れた条件である。

$a^0 = 1$ は見た目に分数がないのであるが、本来 $\dfrac{a^n}{a^n} = 1$ を意味しているので、式は分母に a を含む分数なのである。したがって $a \neq 0$ は必須の条件となる。基本的に 0 乗すると 1 である、と覚えてかまわないのだが、実際は

$$\boxed{a^0 = 1 \quad (a \neq 0)}$$

と書くべき性質なのである。

0^0 について

$a^0 = 1$ は言わば記述上の約束であるから、約束の延長として $a = 0$ のときは $0^0 = 1$ と約束してもかまわないであろう。しかし実際には、完全な数値 0 を使って 0^0 を計算することはできない。なぜなら、$\dfrac{0}{0}$ の値を求めることと等しいからである。ただし、極限状態としての 0 を考えるならその限りではない。たとえば x^y を考え、$x \to 0$、$y \to 0$ とすればよい。しかしこのときは、x が 0

に近づく近づき方と、y が 0 に近づく近づき方にはいろいろな場合があって、一概に 1 に収束するとはいえないのである。

少し技巧的ではあるが、$x = \dfrac{1}{2^{n+1}}$、$y = \dfrac{1}{n}$ として、$n \to \infty$ となる場合を考えよう。このとき

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = 0、\qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

であるから、$x \to 0$、$y \to 0$ になっている。その上で x^y がどうなるか知りたいのだが、Microsoft Excel ならその様子がつかみやすい。

◇	A	B	C	D	E	F
1	n	x=1/(2^(n+1))	y=1/n	x^y		
2	1	(* B2)	(* C2)	(* D2)		
3	(* A3)	↓下へコピーする	↓下へコピーする	↓下へコピーする		
4	↓下へコピーする	↓	↓	↓		
5	↓	↓	↓	↓		
6	↓	↓	↓	↓		

※ セルの式
(B2)　=1/(2^(A2+1))
(C2)　=1/A2
(D2)　=B2^C2
(A3)　=A2*1.33

$n \to \infty$ は便宜的に値を順次 1.33 倍することで実現している。順次 2 倍しても同じことであるが、それでは急激に大きな値になってしまい x^y の収束の様子がつかみづらいので、そのようにしたに過ぎない。その結果 B 列のセルには、たとえば 6.01276E-05 のように表示される。これは 6.01276×10^{-5} の意味であるから、E 以下の数字が大きいほど 0 に近い値になっている。さて、x^y は 1 に収束しただろうか。

この例では x^y は 0.5 に近づいているように見える。実際、$x = \dfrac{1}{2^{n+1}}$、$y = \dfrac{1}{n}$ のときの x^y は

$$x^y = \left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt[n]{\frac{1}{2}}$$

であるから、

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}} = 1$$

より $\displaystyle\lim_{x,y\to 0} x^y = \frac{1}{2}$ が分かるのである。

＊　＊　＊

この例で、もし $x = \dfrac{1}{5^{n+1}}$ ならば $x^y = \dfrac{1}{5}$ になることは容易に分かるので、$a^0 = 1$ が記述上の約束だからといって、$0^0 = 1$ と約束するのは無理がある。0^0 は**不定値**とするのが正しい解釈なのである。

しかし、たとえばコンピュータで何らかのプログラムを組む際、エラーを回避する目的で 0^0 に何らかの値を与えることがあるかもしれない。もちろん、エラーが避けられればどんな値でもかまわないのであるが、$0^0 = a$ と仮定すると

$$a = 0^0 = 0^{0+0} = 0^0 \cdot 0^0 = a^2$$

とできることから、a は $a = a^2$ の解である 0 か 1 にしておくのがよいかもしれない。しかし

$$a = 0^0 = 0^{0 \cdot 0} = (0^0)^0 = a^0$$

ともできてしまうことから、$a^1 = a^0$ より $1 = 0$ という矛盾が生じる。何らかの目的のために、便宜上 0^0 に値を与えることがあっても、やはり 0^0 は不定値なのである。▮