高まる整合性

指数法則を正直に適用しても、指数に負の整数を使えば整合性に矛盾が生じないことが分かった。いくつかある法則のうち、

$$a^m \times a^n = a^{m+n}、\qquad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

については m、n の和と差であるから、m、n が整数である限り、指数に使う数は整数までで十分である。

ところで指数法則には、あと 1 つ $(a^m)^n = a^{mn}$ があった。これを無条件に適用すると、たとえば

$$(\sqrt{3}\,)^2 = 3 = 3^1$$

であるから、$\sqrt{3} = 3^m$ とおいてみると

$$(3^m)^2 = 3^{2m} = 3^1 \qquad \text{より} \qquad 2m = 1、\text{すなわち } m = \frac{1}{2}$$

であることが要求される。このことから $\sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}}$ と記述すべきことが分かる。一般に $(\sqrt{a}\,)^2 = a$ なので

$$\boxed{\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}}$$

と書く約束を取り付ければ、指数法則の整合性が高まるだろう。とくに注意を付け加えてないが、式に $\sqrt{a}$ があるので $(a \geqq 0)$ は必須の条件である。

累乗根

$\sqrt{a}$ とは、2 乗して a になる数のことであった。そのような数を考えたのは、方程式 $x^2 = a$ の解を記述する必要に迫られたからに他ならない。べき乗に関する方程式は

$$x^3 = a, \qquad x^4 = a, \qquad x^5 = a, \qquad x^6 = a, \qquad \ldots$$

のように際限なく続く。たとえば $x^3 = 8$ であれば $x = 2$ が解であるが、$x^3 = 7$ であれば x を特定するのは困難である。本当は困難ということではなく、既存の表し方—整数の比や根号を組み合わせた表記法—では無理という意味である。そこで、2 乗して a になる数を $\sqrt{a}$ と書くことに倣（なら）って、3 乗して a になる数を $\sqrt[3]{a}$ と書くことにし、**a の 3 乗根**と呼ぶ。一般に

n 乗して a になる数を $\sqrt[n]{a}$ で表し、a の n 乗根という

のである。a の n 乗根を総称して**累乗根**と言うことがある。

すると、少し困った状況が生じていることに気づくだろうか。それは、$x^2 = a$ は $a \geqq 0$ のときに限り解が $x = \pm\sqrt{a}$、または $x = 0$ となるのに対し、$x^3 = a$ は a の正負に関わらず解は $x = \sqrt[3]{a}$ でよいことである。実際、$x^2 = -8$ は解けないが、$x^3 = -8$ なら $x = -2$ と解けるので、$\sqrt{-8}$ と書くことは問題だが、$\sqrt[3]{-8}$ と書いてそれが -2 を表すとしてもよいことになる。

結局のところ a の n 乗根については、n が偶数なら $a \geqq 0$ でなくてはならず、n が奇数なら a の正負は無視してよいことになる。これはこれで厳格な規則として適用し得るのであるが、今後、指数関数を考える上では、未知数の正負によって扱いを変えなくてはならず、少々煩わしい。そこで、a の n 乗根を単独で考えるときに限り、n の偶奇と a の正負を厳格にとらえることにする。言い換えれば、n を 1 つの値に決めたとき、考え得るものはすべて a の n 乗根として扱うということである。

それに対して、一般的な $\sqrt[n]{a}$ を考えたり、関数を扱うときは基本的に $a > 0$ に限定することにし、さらに、n が偶数のときは正の n 乗根だけ見ることにしよう。$a \geqq 0$ でなく $a > 0$ に限定したのは、$\sqrt[n]{a}$ が分数の分母に使うことを想定しているからである。

定義の順序が逆になった感があるので、まとめておこう。a の平方根は $a > 0$ のときに限り

・2 乗して a になる数を a の平方根と呼ぶ
・a の平方根は正の値と負の値の 2 つがある
・a の平方根のうち、正の値を $\sqrt{a}$ で表す

と定義したことに倣って、a の n 乗根は $a > 0$ のときに限り

・n 乗して a になる数を a の n 乗根と呼ぶ
・n が偶数のときは正の値と負の値の 2 つがある
・a の n 乗根のうち正の値を $\sqrt[n]{a}$ で表す

と定義するのがよいだろう。

*　*　*

n 乗根の 3 番目の定義だけを読むと、たとえば -8 の 3 乗根は定義できない。ここでの定義はあくまでも一般的な n 乗根に対するものだから、それでよいのである。もし 3 乗根を単独で扱うことにすれば、$\sqrt[3]{a}$ に対して $a = -8$ は意味を持ち、$\sqrt[3]{-8} = -2$ である。このようなときは、関数 $y = \sqrt[3]{x}$ を実数 x について定義

することもできる。しかし $\sqrt[3]{a}$ において、$a>0$ の条件下であっても

$$y=\sqrt[3]{x} \text{ は } \quad y=\begin{cases} \sqrt[3]{x} & (x>0) \\ 0 & (x=0) \\ -\sqrt[3]{-x} & (x<0) \end{cases}$$

と定義すれば、結果的に同じことになる。このようなこともあって、$\sqrt[n]{a}$ は $a>0$ の場合を定義しておけば十分なのである。▮

累乗根の性質

平方根の計算では

$$\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}\text{、}\qquad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$$

などの性質が使えた。実際、累乗根においても

$$\boxed{\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}\text{、}\qquad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}}$$

が成り立つ。このことは証明を要することなので、それを示しておこう。ただし、$a>0$、$b>0$ で、n は正の整数であるとする。

$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$ だけを示せば十分であろう。まず、$A=\sqrt[n]{a}$、$B=\sqrt[n]{b}$ とおく。このようにおけば $AB=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$ と書けることから、$AB=\sqrt[n]{ab}$ と書けることが示せればよい。さて、A、B は a や b の n 乗根であるから、n 乗するとそれぞれ a、b になる。すなわち

$$A^n=a\text{、}\qquad B^n=b$$

である。これらは単に実数の等式であるから、辺々掛けて

$$A^nB^n=ab \qquad \text{すなわち} \qquad (AB)^n=ab$$

としてよい。$(AB)^n=ab$ とは、AB は n 乗すると ab になる数を意味する。これは累乗根の定義から $AB=\sqrt[n]{ab}$ と書けたのであった。すなわち $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$ が示された。(証明終り)

累乗根には、平方根の計算をしているだけでは気づきにくい性質がある。次の

$$\boxed{(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}\text{、}\qquad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}}$$

が成り立つことも示しておきたい。

いずれも先の証明方法と大差ないので、ここでは $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$ を示すだけにする。まず、$A=\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$ とおく。A は $\sqrt[n]{a}$ の m 乗根であるから、m 乗すると $\sqrt[n]{a}$ になる。よって $A^m=\sqrt[n]{a}$ で

ある。ここで A^m はまた、n 乗すると a になる数である。したがって、$(A^m)^n = a$ であり、指数法則より $A^{mn} = a$ が成り立つ。これは、A は mn 乗すると a になる数を意味するので、累乗根の定義から $A = \sqrt[mn]{a}$ と書けた。すなわち $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$ が示された。（証明終り）

有理数の指数

さて、累乗根の定義をしたところで、指数法則に戻ることにしよう。$\sqrt[n]{a}$ と表記された数は n 乗すると a になると決めたので、

$$(\sqrt[n]{a})^n = a = a^1$$

である。このことは、累乗根における指数の使い方を見れば

$$\boxed{\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}}$$

と書くことが整合性の点でよいことになる。

累乗根は $n \geqq 2$ を満たす自然数において定義されたので、定義通りに書けば $n = 2$ のときは $\sqrt[2]{a}$ と書くものである。しかし、$n = 2$ のときは平方根 $\sqrt{a}$ であったから、いままで私たちが使ってきた記号 $\sqrt{\ }$ は、肩に乗った ^{2} が省略されたものであったことが分かる。数学では 1 の省略はよく見られるが、2 が省略されるのは珍しいことかもしれない。

以上で、指数には負の整数を使えるだけでなく、整数の逆数も使ってよいことになった。これは、指数に有理数が使えるようになったということでもある。それは、m、n を正の整数とし $\dfrac{m}{n} = r$ とおくと、

$$\left.\begin{aligned} (\sqrt[n]{a})^m &= (a^{\frac{1}{n}})^m \\ \sqrt[n]{a^m} &= (a^m)^{\frac{1}{n}} \end{aligned}\right\} = a^{\frac{m}{n}} = a^r$$

の流れから、整数のべき乗と整数の累乗根の組み合わせが有理数の指数になっていることが理解できるだろう。

また、上の結果で得た a^r の逆数を考え、$-\dfrac{m}{n} = -r$ とおくと、

$$\frac{1}{a^r} = \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{(\sqrt[n]{a})^m} = (\sqrt[n]{a})^{-m} = (a^{\frac{1}{n}})^{-m} \\ \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} = \sqrt[n]{\frac{1}{a^m}} = \sqrt[n]{a^{-m}} = (a^{-m})^{\frac{1}{n}} \end{array}\right\} = a^{-\frac{m}{n}} = a^{-r}$$

と書いてよいことから、有理数 r についても

$$\boxed{a^{-r} = \frac{1}{a^r}}$$

という記述をしてよいことが分かる。