約束

数の計算は四則（$+$, $-$, $\times$, $\div$）を基本にして行われる。数どうしの計算ではあまり問題になることはないのだが、文字が含まれる場合は共通の認識がないと混乱を招いてしまうだろう。そのため、掛け算をはじめとして

$$\begin{array}{rcll} a\times 5 & \Rightarrow & 5a & \text{（文字と数の積は}\times\text{を省き、数を文字の前に書く）} \\ 1a & \Rightarrow & a & \text{（1 と文字の積は 1 を省いて書く）} \\ aaa & \Rightarrow & a^3 & \text{（同じ文字の積は\textbf{指数}を用いて書く）} \end{array}$$

など、いくつかの約束が決められている。約束を守らなくても式が正しければよいといっても、やはり効率や習慣を優先させる方が何かと便利なのである。ここからは、とくに指数の約束から広がる世界を眺めることにしよう。

* * *

約束は**定義**とは違う。どちらも、その後の議論を明確で正確なものにするための決めごとではあるが、定義は概念の内容についての決まり、約束は既成の事実についての決まり、とでも言えばよいだろうか。定義は、これから始める議論や論理のために必要な事柄であるから、定義を決めない限り先に進むことはできない。また、とくに説明や理屈を抜きにして認めてもらうことが定義の特徴である。それに対して約束は、既成事実について取り交わす新しい契約のようなものだから、必ずしも約束に従わなくても先へ進むことができる。と言っても、実際は約束に従うことがほとんどである。それは、おそらく多くの約束が理にかなったものだからだろう。▌

指数の約束

さて、指数の約束は

$$\boxed{\overbrace{a\times a\times\cdots\times a}^{n\text{ 個}}=a^n}$$

と書くことであった。a が数なら計算して 1 つの値にできるのだが、場合によってはとてつもなく大きな値になることがあるかもしれない。また、文字のままだと $a\times a\times\cdots\times a$ は冗長すぎると感じることだろう。そのため積の表記にこのような約束を決めることは、理にかなっているのである。

もちろん約束を決めただけでは意味がない。決めた約束の下で、いままで行われてきた計算や理論が滞りなくできる必要がある。その点、ここに示した指数の約束は、続けて新たな約束を付け加えることができる上質の約束なのである。そのことを順に説明しよう。

まず、

$$\overbrace{a\times a\times\cdots\times a}^{m\text{ 個}}\times\overbrace{a\times a\times\cdots\times a}^{n\text{ 個}}=\overbrace{a\times a\times\cdots\times a}^{(m+n)\text{ 個}}$$

が成り立つので、このことを指数の約束に従って記述するならば

$$\boxed{a^m \times a^n = a^{m+n}}$$

とすればよい。よって、同じ**底（てい）**を持つ数の積においては、指数の和を求めて表してよいことが分かる。底とは、指数によって乗算される数のことを指す。いまの例では、a が底である。

掛け算においては、さらに

$$(a^m)^n = \overbrace{a^m \times a^m \times \cdots \times a^m}^{n\ 個}$$

のような計算をすることがある。これは結局

$$\overbrace{(\underbrace{a \times \cdots \times a}_{m\ 個}) \times (\underbrace{a \times \cdots \times a}_{m\ 個}) \times \cdots \times (\underbrace{a \times \cdots \times a}_{m\ 個})}^{n\ 個} = \overbrace{a \times a \times \cdots \times a}^{mn\ 個}$$

のように a が mn 個掛け合わされたことになっているので、指数の記述の約束に従えば

$$\boxed{(a^m)^n = a^{mn}}$$

と書けるので、同じ底を持つ数の**べき乗**は、指数の積で表してよいことが分かる。

次に、割り算 $\dfrac{a^m}{a^n}$ においては、$m > n$ ならば n 個の a が約分され

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{\overbrace{a \times a \times \cdots \times a \times a \times \cdots \times a}^{m\ 個}}{\underbrace{a \times \cdots \times a}_{n\ 個}} = \overbrace{a \times a \times \cdots \times a}^{(m-n)\ 個}$$

のように、分子に余分の $(m-n)$ 個の a が残る。$m < n$ の場合は

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{\overbrace{a \times \cdots \times a}^{m\ 個}}{\underbrace{a \times a \times \cdots \times a \times a \times \cdots \times a}_{n\ 個}} = \frac{1}{\underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{(n-m)\ 個}}$$

のように、分母に余分の $(n-m)$ 個の a が残って分数となる。そして、$m = n$ のときは分子・分母ともにすべて約分され 1 になるのである。

このことから、割り算における指数を用いた約束は

$$\boxed{\frac{\overbrace{a \times a \times \cdots \times a}^{m\ 個}}{\underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n\ 個}} = \begin{cases} a^{m-n} & (m > n\ のとき) \\ \dfrac{1}{a^{n-m}} & (m < n\ のとき) \\ 1 & (m = n\ のとき) \end{cases}}$$

となるであろう。

整合性

指数を記述する約束によって、乗除の計算は文字に関わらず迅速にできるようになった。とくに割り算においては

$$2^8 \div 2^5 = 2^{8-5} = 2^3 = 8 \quad \text{や} \quad 5^4 \div 5^5 = \frac{1}{5^{5-4}} = \frac{1}{5}$$

のようにできることで、$256 \div 32$ や $625 \div 3125$ などの煩(わずら)わしい計算から解放されてよい。さらに、ここでは $5^1 = 5$ であるとし、指数の 1 も省略する約束を使っていることを注意しておこう。

割り算において気をつけなければならないのは、割られる数の指数と割る数の指数は、どちらが大きいかということである。この確認を怠ると

$$2^5 \div 2^8 = 2^{5-8} = 2^{-3} = ?$$

ということになってしまう。2 の -3 乗は、2 をいくつ掛けているのだろう。指数が具体的な数値であれば不注意をなくせば済む話であるり、たとえ間違えたとしてもすぐに訂正できる。しかし $2^a \div 2^b$ のように文字を含む場合は、a、b の大小によって分数になるかならないかを考慮しなくてはならず、決して効率がよいとは言えないのである。

そこで割り算においては、指数の引き算をしたときに負の値になったとしたら、それは割られる数の指数が大きかったからに他ならず、分数になることは間違いないと考えることにする。そうすれば n を正の整数としたとき

$$\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$$

と定めることで、たとえ $2^5 \div 2^8 = 2^{5-8} = 2^{-3}$ となっても、それは $\dfrac{1}{2^3}$ と考えることができる。実際 2^{-3} という書き方は、指数の約束を無条件に当てはめて $2^{-3} \times 2^8 = 2^{-3+8} = 2^5$ としても、正しい計算

$$2^{-3} \times 2^8 = \frac{1}{2^3} \times 2^8 = \frac{2^8}{2^3} = 2^5$$

と同じ結果になっていることからも、問題ない記述であろう。ただし、この記述の約束は分母に a があるので $a \neq 0$ は暗黙の条件であることに注意されたい。

負の整数の指数に意味を持たせられたことで、指数が 0 になっても、

$$a^0 = a^{n-n} = a^n \cdot a^{-n} = a^n \cdot \frac{1}{a^n} = 1$$

と考えることで

$$\boxed{a^0 = 1}$$

という記述を、約束として取り付けることができるのである。

*　　*　　*

　指数に負の値が使えることは大変便利なことである。数学に限らず、極端に小さな数を扱うことは案外あるものである。指数に負の数を使わない場合、たとえば 0.000000000000000000000009274 は $\dfrac{9274}{10^{27}}$ と書くであろうし、0.0000000000000000000000602 は $\dfrac{602}{10^{25}}$ と書くであろう。負の指数を使えば、それぞれ 9.274×10^{-24}、6.02×10^{-23} と書けるので、前者の値が後者の値より一桁小さいことは一目瞭然である。もちろん、$\dfrac{9.274}{10^{24}}$ や $\dfrac{6.02}{10^{23}}$ と書くこともできるが、整数比で表すのが分数本来の姿であるから、無理に小数を使うことはないだろう。$a \times 10^n$ 表記を使うときは、

$$1 \leqq a < 10$$

の値にするのが一般的である。▮