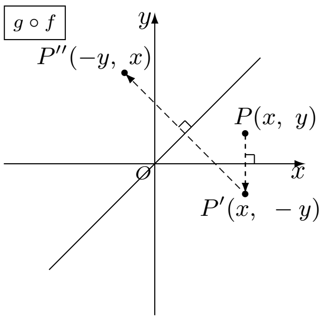
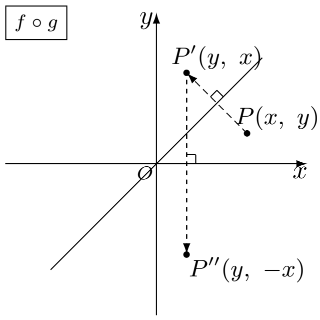
1 次変換の合成

行列 A、B で表される 1 次変換をそれぞれ f、g としてみよう。このとき f と g との**合成変換**、すなわち変換 f に続いて変換 g を施す変換を考える。f に続いて g を行う合成を $g \circ f$ で表す。$f \circ g$ でないことに注意されたい。

この表し方は、たとえば関数 $y = f(x)$ で得た値 y を、関数 $z = g(y)$ に代入することを考えるとよい。x は f, g の順に送られてゆき $z = g(f(x))$ となるので、式の上では g, f の順に目に入る。したがって、$z = g(f(x))$ が $z = (g \circ f)(x)$ と書かれるのは自然なことであろう。そして、f、g を表す行列がそれぞれ A、B であったことから、変換 $g \circ f$ が BA によって与えられることは、ごく自然に解釈できることである。

合成変換の具体的な例を示そう。たとえば x 軸に関する対称移動を f、直線 $y = x$ に関する対称移動を g とする。x 軸に関する対称移動 f は y の正負を逆にするので、f を表す行列 A は $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ であり、原点に関する対称移動 g は x、y を交換するので、g を表す行列 B は $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ である。





x 軸に関する対称移動 f に続けて $y = x$ に関する対称移動 g を行う変換 $g \circ f$ は、行列を用いて表すと BA であるから、任意の点 $P(x,\ y)$ は

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

に移る。しかし、この逆の順—つまり、$y = x$ に関する対称移動 g の次に x 軸に関する対称移動 f の順—で変換すると

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$$

となって、別の変換になってしまうことが確認できる。

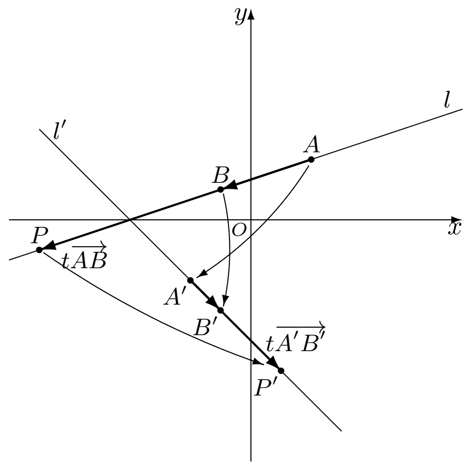
正則な 1 次変換

以前、正方行列 A に逆行列 A^{-1} が存在するとき、A を正則行列と呼ぶことにしたが、1 次変換 f を表す行列 A に逆行列 A^{-1} が存在するとき、1 次変換 f は**正則である**という。たとえば 1 次変換 f を表す行列 A が正則で、任意の点 $(x,\ y)$ — $\overrightarrow{p}$ で表すことにしよう—を、$\overrightarrow{q} = (x',\ y')$ に移せば

$$\overrightarrow{q} = A\overrightarrow{p}$$

であり、両辺に左から A^{-1} を掛けて $\overrightarrow{p} = A^{-1}\overrightarrow{q}$ となる。これは逆変換の逆がもとに戻ることであり、$\overrightarrow{p}$ と $\overrightarrow{q}$ が 1 対 1 対応になっていることを意味している。それは同時に、直線が直線に移ることでもある。それを説明してみよう。

まず、直線 l 上の定点 A、B と任意の点 P を考える。このとき、各点をベクトルで表すと、l は $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB}$ になっている。



正則な 1 次変換 f によって、点 A、B、P が A'、B'、P' に移るとすると、1 次変換の線形性から

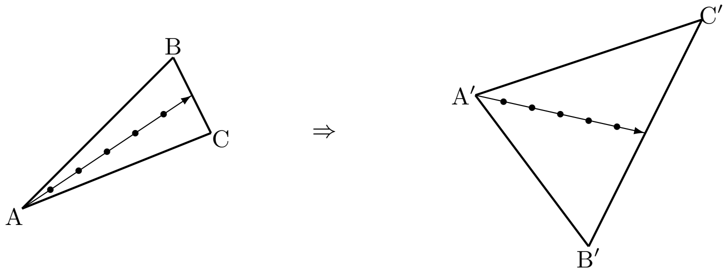
$$\begin{aligned} f(\overrightarrow{OP}) &= f(\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB}) \\ &= f(\overrightarrow{OA}) + tf(\overrightarrow{AB}) \\ &= \overrightarrow{OA'} + t\overrightarrow{A'B'} \end{aligned}$$

であるから、$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OA'} + t\overrightarrow{A'B'}$ となっている。これは、やはり直線である。

さらに、変換 f によって t の値は変わらないのだから、たとえば $0 < t < 1$ であったなら、$\overrightarrow{OP}$ が表す点は線分 AB の間の点であり、$\overrightarrow{OP'}$ が表す点も線分 $A'B'$ の間の点であることが分かる。また、$0 < t_1 < t_2 < 1$ であれば、t_2 で表される点の方がより B に近い。すなわち、f で直線が直線

に移るといっても、直線 l 上の点が勝手な l' 上の点に移っているわけでなく、整然と列をなして移ることも分かるのである。

点が整然と列をなして移るということは、図形の内部は図形の内部に移されることを意味する。



たとえば $\triangle\mathrm{ABC}$ が $\triangle\mathrm{A'B'C'}$ に移るとき、頂点 A から辺 BC へ向かう直線は頂点 A′ から辺 B′C′ へ向かう直線へ移る。直線上の点は整然と列をなして移っているので、$\triangle\mathrm{ABC}$ の内部にあった点は $\triangle\mathrm{A'B'C'}$ の内部へ移ることが予想される。本来なら、ベクトルなどを用いて証明をすることだろうが、この程度の確認でも十分かもしれない。

正則でない１次変換

正則でない１次変換が表す行列は逆行列を持たない。たとえば $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 6\end{pmatrix}$ で表される１次変換を例にとってみよう。A は逆行列を持たない。A による変換は

$$\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+2y\\ 3x+6y\end{pmatrix}$$

となるので、平面上の任意の点 $(x,\ y)$ は $(x',\ y')=(x+2y,\ 3x+6y)$ に移される。ここで $x+2y$ と $3x+6y$ の関係を見ると、ちょうど 2 倍の関係になっていることが分かる。すなわち $y'=2x'$ である。つまり平面上の点は、変換によって直線に写された—この場合は移動というより集められたという感覚が近いかもしれない—のである。

実は、逆行列を持たない行列による変換は、行列が零行列でなければ必ず直線に移される。このことは、$A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ において、$ad-bc=0$ であることから説明できる。A が零行列でなければ、$a,\,b,\,c,\,d$ の少なくとも 1 つは 0 でないので、かりに $a\neq 0$ とすると $d=\dfrac{bc}{a}$ がいえる。そこで

$$\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & \dfrac{bc}{a}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ax+by\\ cx+\dfrac{bc}{a}y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ax+by\\ \dfrac{c}{a}(ax+by)\end{pmatrix}$$

としてみると、$y'=\dfrac{c}{a}x'$ になっていることが分かるのである。

では、A が零行列のときはどうなるかといえば、明らかに $(x,\ y)$ は $(0,\ 0)$ に写される。以上のことから

正則でない 1 次変換は、平面全体を原点を通る直線または原点に写す

と言えるのである。

1 次変換体験シート

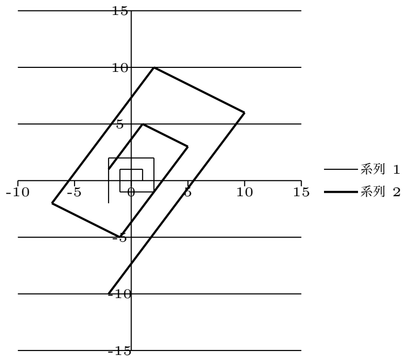
Microsoft Excel で手軽に 1 次変換を体験してみよう。と言っても、複雑で大げさなことはしない。一筆書きで描ける簡単な図形が 1 次変換で変化する様子を見るだけである。一筆書きの図形は座標で与える。

◇	A	B	C	D	E
1	a	b	c	d	
2	-2	3	1	4	
3					
4	x	y	x'	y'	
5	1	0	=$A$2*A5+$B$2*B5	=$C$2*A5+$D$2*B5	
6	1	1	↓下へコピーする	↓下へコピーする	
7	0	1	↓	↓	
8	-1	1	↓	↓	
9	-1	0	↓	↓	
10	-1	-1	↓	↓	
11	0	-1	↓	↓	
12	1	-1	↓	↓	
13	2	-1	↓	↓	
14	2	0	↓	↓	
15	2	1	↓	↓	
16	2	2	↓	↓	
17	2	1	↓	↓	
18	2	2	↓	↓	
19	1	2	↓	↓	
21	0	2	↓	↓	
21	-1	2	↓	↓	
22	-2	2	↓	↓	
23	-2	1	↓	↓	
24	-2	0	↓	↓	
25	-2	-1	↓	↓	
26	-2	-2	↓	↓	
27					
28					

たとえば上のように入力した場合、2 行目の 4 個の数値は、その上の a, b, c, d から想像できるように、1 次変換の行列の成分である。この例は $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ を表している。A,B 列 5 行目以降の数値のペアは座標 $(1,\ 0)$、$(1,\ 1)$、$(0,\ 1)$、$(-1,\ 1)$、$\ldots$ を表している。これが順に直線で結ばれると、この例では左巻きの渦巻きとなる。C,D 列の式から分かるように、この列には移動先の座標が計算される。このようにしておくと、2 行目の 4 個の数値を変更するたびに移動先の座標が計算されるのである。

さて、このままでは単に計算が自動化できたに過ぎないので、目に見えるように Excel に一仕事してもらおう。まず、A5 から B26 までの範囲を選択して、メニューから「グラフ」-「散布図（直線）」を選ぶ。Excel のバージョンによるのだが、すぐにグラフが表示されるか次の選択を促されるかするだろう。いずれにせよ、ここで表示されるグラフは初期値が「系列 1」と呼ばれるグラフである。

移動前と後のグラフを比較するためには、同じグラフに「系列 2」と呼ばれるグラフを表示させなければならない。これもバージョンによって多少操作が変わってくるが、すべきことは C5 から D26 までの範囲を選択して、散布図にすることである。おそらく「データの追加...」をして、データの選択範囲を調整するのだろう。その方法はいちいち説明しないが、うまく 2 種類の座標データを散布図にすることができたら、次のようなグラフが出来上がるはずである。



さらに、ワークシートに入力した x, y の値を適当に変えれば、同時にグラフの形も変化するはずである。しかし、どのようにグラフの形が変化しようとも、結局はもとの図形に拡大・縮小と回転を施したものを超えることはない。それが 1 次変換の特徴なのである。