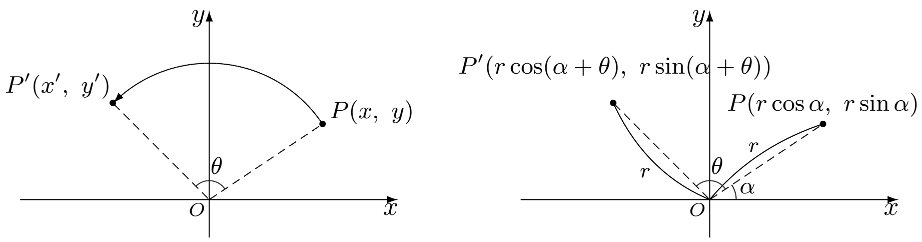
回転移動

任意の点を原点の回りに角 θ だけ回転させる移動は、1 次変換になっている。このことを説明しておこう。



点 $P(x,\,y)$ を θ だけ回転させた点が $P'(x',\,y')$ であるとする。はじめ P と x 軸のなす角が α、$OP = r$ であったなら、$P(x,\ y) = P(r\cos\alpha,\ r\sin\alpha)$ であり、$P'(x',\ y') = P'(r\cos(\alpha+\theta),\ r\sin(\alpha+\theta))$ である。加法定理によって P' の座標を書き換えると、

$$P'(x',\ y') = P'(r\cos\alpha\cos\theta - r\sin\alpha\sin\theta,\ r\sin\alpha\cos\theta + r\cos\alpha\sin\theta)$$

であるから、要するに

$$\begin{cases} x = r\cos\alpha \\ y = r\sin\alpha \end{cases} \quad \text{を} \quad \begin{cases} x' = \underline{r\cos\alpha}\cos\theta - \underline{r\sin\alpha}\sin\theta \\ y' = \underline{r\sin\alpha}\cos\theta + \underline{r\cos\alpha}\sin\theta \end{cases} \quad \text{に}$$

移す変換になっている。下線部はそれぞれ x、y であったから、x'、y' の求め方は 1 次変換の形になっている。したがって行列を用いて

$$\boxed{\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}$$

と表せることも分かるだろう。すなわち、$\cos\theta$ と $\sin\theta$ で構成されるこの行列が、θ だけ回転させる変換の母体となっているのである。

逆回転と直交行列

回転変換の母体となる $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ の逆行列 A^{-1} を求めてみよう。それは

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\cos^2\theta + \sin^2\theta} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

である。もちろん $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ を適用した。当然のことながら $AA^{-1}=E$ である。

ところで、A^{-1} は見覚えがあるはずである。そう、直交行列の 1 つである。A が直交行列であるとは、A の転置行列 ${}^tA$ との間に $A{}^tA=E$ が成り立つことであった。確かに $A^{-1}={}^tA$ になっているので、$AA^{-1}=E$ であることと $A{}^tA=E$ は同じことである。すなわち、任意の点を原点の回りに θ だけ回転させる行列も直交行列なのである。

直線を回転させる

回転変換によって、直線 $l: y=mx+k$ を原点の回りに θ だけ回転させてみよう。l 上の点を $(x,\ y)$、l を回転させた直線 l' 上の点を $(x',\ y')$ とすると

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

が成り立っている。ここで両辺の左から逆行列を掛けることで

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta\cdot x'+\sin\theta\cdot y' \\ -\sin\theta\cdot x'+\cos\theta\cdot y' \end{pmatrix}$$

になることは容易に分かるだろう。そこで、この $(x,\ y)$ を l の式に代入して

$$-\sin\theta\cdot x'+\cos\theta\cdot y' = m(\cos\theta\cdot x'+\sin\theta\cdot y')+k$$

としてみよう。等式を整理して

$$y' = \frac{m\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta-m\sin\theta}x' + \frac{k}{\cos\theta-m\sin\theta}$$

である。しかし、なんだかよく分からない結果になっただけのようだ。

実際、具体的な例として、直線 $l: y=x+1$ を原点の回りに $60°$ 回転させた場合、$m=1$、$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$、$\sin\theta=\dfrac{1}{2}$ を代入して

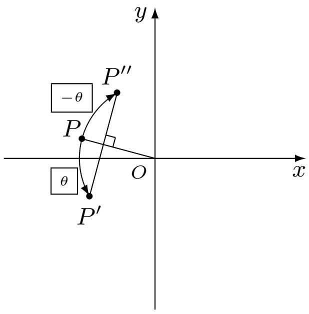
$$y' = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}}x' + \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}} = (2+\sqrt{3})x'+(\sqrt{3}+1)$$

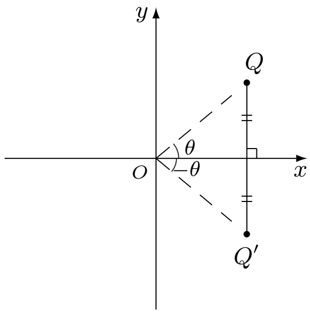
であって、とくに l と強い関連がある様子を見ることはできない。

回転を表す行列は直交行列の 1 つであっても、変換によって何かが直交するわけではないのである。

*　　*　　*

直線に限らず、任意の曲線を原点の回りで回転しても曲線どうしが直交するわけではない。別の意味で直交していることはすでに述べた。ただ、少々こじつけであることは否めないものの、回転行列が直交に関与している部分がある。



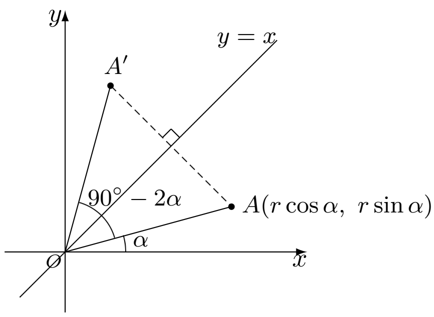


たとえば、任意の点 P を原点の回りに θ 回転した点を P'、$-\theta$ 回転した点を P'' としたとき、当然のことながら $OP \perp P'P''$ になっている。それなら回転に限らず、たとえば x 軸について対称な点 Q と Q' において、QQ' は x 軸に垂直である。しかし x 軸に対称な点は、x 軸に関して互いに θ、$-\theta$ の回転に相当するので、回転移動と同じことである。

すなわち、$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ による移動は、必ず動径に対して円周上の対称位置への移動になるので、移動した点を結ぶ線分は動径に垂直である。回転移動の行列が直交行列であることは、この点においてもそれなりの名称といってよいだろう。▮

対称移動と回転

直線 $y = x$ に関する対称移動を考えてみる。$OA = r$、点 A が x 軸となす角を α とすると、$A(r\cos\alpha,\ r\sin\alpha)$ である。すると、以前見たように A の対称点である A' は、x、y 座標が交換されて $A'(r\sin\alpha,\ r\cos\alpha)$ となる。



ところで、この場合は対称移動であると同時に回転移動にもなっている。A' が y 軸となす角が α であることから、A' は A を $90^\circ - 2\alpha$ だけ回転させたものになっている。A を角 $90^\circ - 2\alpha$ だけ回転させる 1 次変換は $\begin{pmatrix} \cos(90^\circ - 2\alpha) & -\sin(90^\circ - 2\alpha) \\ \sin(90^\circ - 2\alpha) & \cos(90^\circ - 2\alpha) \end{pmatrix}$ であるから、$A'(x',\ y')$ は

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(90^\circ - 2\alpha) & -\sin(90^\circ - 2\alpha) \\ \sin(90^\circ - 2\alpha) & \cos(90^\circ - 2\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

である。本当に $A'(r\sin\alpha,\ r\cos\alpha)$ になるであろうか。$(x,\ y)=(r\cos\alpha,\ r\sin\alpha)$ として、実際に計算してみよう。

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos(90^\circ-2\alpha) & -\sin(90^\circ-2\alpha) \\ \sin(90^\circ-2\alpha) & \cos(90^\circ-2\alpha) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r\cos\alpha \\ r\sin\alpha \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \\ \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r\cos\alpha \\ r\sin\alpha \end{pmatrix} \qquad \text{（}\sin,\cos\text{の相互関係より）} \\
&= \begin{pmatrix} r\sin 2\alpha\cos\alpha - r\cos 2\alpha\sin\alpha \\ r\cos 2\alpha\cos\alpha + r\sin 2\alpha\sin\alpha \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} r\{\sin 2\alpha\cos\alpha - \cos 2\alpha\sin\alpha\} \\ r\{\cos 2\alpha\cos\alpha + \sin 2\alpha\sin\alpha\} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} r\sin(2\alpha-\alpha) \\ r\cos(2\alpha-\alpha) \end{pmatrix} \qquad \text{（三角関数の加法定理より）} \\
&= \begin{pmatrix} r\sin\alpha \\ r\cos\alpha \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

当然と言えば当然の結果であるが、1 次変換の考えは行列とよく馴染んでいることが分かる例である。

1 次変換の線形性

1 次変換には**線形性**が備わっている。線形性とは、たとえば関数 f について

$$\boxed{f(a+b)=f(a)+f(b)\text{、}f(ka)=kf(a)}$$

などが成り立つことをいう。このことを $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$、$P=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$、$Q=\begin{pmatrix} z \\ u \end{pmatrix}$ として確認しておこう。$f(a+b)$ に対応する計算は

$$A(P+Q)=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x+z \\ y+u \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a(x+z)+b(y+u) \\ c(x+z)+d(y+u) \end{pmatrix}$$

である。一方、$f(a)+f(b)$ に対応する行列の計算は

$$AP+AQ=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ u \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (ax+by)+(az+bu) \\ (cx+dy)+(cz+du) \end{pmatrix}$$

である。( ) のくくり方に違いはあるが、同じ結果になっているだろう。$f(ka)=kf(a)$ も同様に確かめられる。

あらゆる 1 次変換についての証明にはなっていないが、これまでに扱った範囲の計算に対しての確認にはなっている。線形性は無意識のうちに認めてしまえるほど自然な性質であるが、線形性が成り立たないものも多くある。たとえば $f(x)=x^2$ がそうである。実際、$f(a+b)=(a+b)^2$ は $f(a)+f(b)=a^2+b^2$ ではない。線形性が備わっていることは重要なことなのである。