1 次変換

座標平面上の点 $(x,\ y)$ を点 $(x',\ y')$ へ写す写像 f を考えてみよう。そのような写像はいくらでも考えられるが、とくに

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

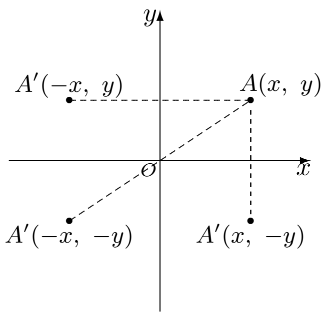
で与えられる写像を**1 次変換**と呼ぶ。1 次変換の式の構成から、明らかに行列を用いて表すことができて

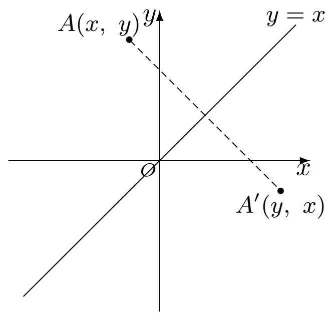
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

となる。したがって、$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が 1 次変換を表す母体となっている。

対称変換

1 次変換というと堅苦しく聞こえるだろうが、座標平面での対称移動は、実は 1 次変換である。





たとえば、$A(x,\ y)$ の y 軸対称の点を $A'(x',\ y')$ とすれば、実際には $A'(-x,\ y)$ であるから $x' = -x$、$y' = y$ になっている。このことを行列を用いて表すと

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

が確かに $x' = -x$、$y' = y$ を表すことが分かるだろう。とくに示さないが、x 軸対称や原点対称の場合も同じことがいえる。また、直線 $y = x$ について対称である点については、$A(x,\ y)$ に対して $A'(y,\ x)$ となることから

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

であることも分かるだろう。

いまは対称となる点から行列を決めたが、逆に行列を決めれば変換を定めることになる。行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ は x、y ともに変化しないので、**恒等変換**といい、行列 $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$ は x、y の値を k 倍するので**相似変換**という。

合成変換

変換を行列で行うことの利点は大きい。再び対称移動の話になるが、y 軸対称の行列を P、原点対称の行列を Q とすると、それぞれの行列は

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}、\quad Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

である。このとき、点 $A(x,\ y)$ を y 軸対称で移動した後、続けて原点対象で移動させることを考える。この場合は、

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}、\quad \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

が続けて行われるので

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

となって、これは結局 A を x 軸対称で移動したものとなっている。

一般に、P、Q を続けて行う変換は、積 QP を 1 回行う変換に等しい。

直線の変換移動

1 次変換による点の変換移動が分かるならば、点の集まりである直線や曲線の変換移動も分かる。たとえば直線 $y = 2x - 3$ は、1 次変換

$$\begin{cases} x' = 3x - 4y \\ y' = -x + 2y \end{cases}$$

によって、どのような図形に変換されるだろうか。直線 $y = 2x - 3$ とは、点 $(x,\ 2x-3)$ の集まりであるから

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 2x - 3 \end{pmatrix}$$

を計算して得られる $(x',\ y')$ の関係が分かればよいことになる。

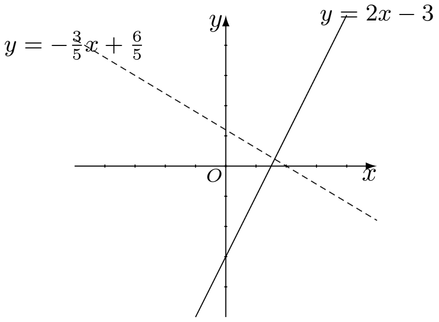
しかし、それよりも $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ の逆行列 $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ を、両辺に左から掛けて

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' + 2y' \\ \dfrac{1}{2}x' + \dfrac{3}{2}y' \end{pmatrix}$$

とした上で、$y = 2x - 3$ に代入してしまう方が早い。実際

$$\frac{1}{2}x' + \frac{3}{2}y' = 2\,(x' + 2y') - 3$$

を整理して、$y' = -\dfrac{3}{5}x' + \dfrac{6}{5}$ が求める式である。すなわち直線 $y = 2x - 3$ は、直線 $y = -\dfrac{3}{5}x + \dfrac{6}{5}$ に移ることになる。



では、直線はどのような移り方をしているのだろうか。移る前の直線と移った後の直線の交点が存在するが、この場合は交点を中心に回転しているわけではないし、原点を中心に回転しているわけでもない。また、対称移動を組み合わせているわけでもない。実際の移り方は、なかなか複雑なのである。

*　　*　　*

“移る” ということばは悩ましい。ここでは、直線が対称移動で、ある位置から別の位置へ “動く” 様子を表すことばとして使っている。

たとえば、丸い大きな皿にナイフやフォークが乗っている様子を思い浮かべてみよう。ここで皿の縁に手をかけて、中心がぶれないように注意して皿をゆっくり回せば、皿の回転に伴ってナイフやフォークは位置を変えてゆくように見えるだろう。このとき、ナイフやフォークは確かに動くのである。

それに対して、対称移動はどうだろう。たとえば直線が x 軸を対象軸にして移動した場合、どのようにして移動したのかと問われれば、移動した様子を説明するのは難しいのではないだろうか。むしろ平面を紙に見立てて、x 軸を折り目として折ったとき、インクが紙に “写された” と考える方がしっくりくるかもしれない。

行列を用いた計算である点の座標が別の位置の座標として表される様子は、点が移動したというより、点が写されたと見るのが自然であろう。実際、1 つの点が別の点に対応する規則を与える行列は、$(x,\ y)$ から $(x',\ y')$ への**写像**を与えている。そのように考えると、点が動いて他の場所に移ることは、点が “写る” ことでもあるだろう。

状況に応じてことばを使い分けるのは煩わしいものだが、点が動く様子を見ることに主眼を置いて、今後も “移る” ということばを積極的に使うことにしよう。▮

座標軸の移動

1 次変換によって直線がどのように移るかを、座標軸の移動を含めて見ることにする。なぜなら、座標軸は直線 $y=0$（x 軸）と $x=0$（y 軸）で表される直線なので、これもまた直線の移動になっているからである。さて、いまの例は 1 次変換

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

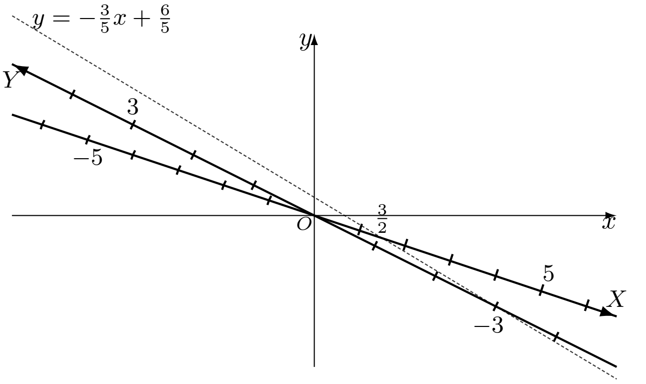
であった。この変換によって、直線 $y=0$ と直線 $x=0$ はそれぞれ

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ -x \end{pmatrix} \quad \text{と} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4y \\ 2y \end{pmatrix}$$

のように写される。

ここで、$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ -x \end{pmatrix}$ について x' と y' の関係を見ると、それは $3x$ と $-x$ の関係に等しいことが分かる。つまり、$y' = -\dfrac{1}{3}x'$ の関係である。このことは直線 $y=0$、すなわち x 軸が直線 $y' = -\dfrac{1}{3}x'$ に移されることを意味し、それが変換後の新しい X 軸になるのである。

同じことが直線 $x=0$ についても言えて、変換後の x' と y' の関係が $y' = -\dfrac{1}{2}x'$ となって、それが新しい Y 軸になるのである。



実際そのようにグラフを描いてみると、はじめの直線 $y=2x-3$ が、x 軸の $(\frac{3}{2},\ 0)$、y 軸の $(0,\ -3)$ で交わっていた通りに、移された直線 $y = -\dfrac{3}{5}x + \dfrac{6}{5}$ は、X 軸の $(\frac{3}{2},\ 0)$、Y 軸の $(0,\ -3)$ で交わっていることが分かるだろう。

*　*　*

図において、$y = -\dfrac{1}{3}x$ の X 軸と $y = -\dfrac{1}{2}x$ の Y 軸の方向が、互いに別の方向になっているのはなぜだろうか。その理由は、$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ -x \end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4y \\ 2y \end{pmatrix}$ にある。たとえば x 軸上の正の方向に向かう点列

$(1,\ 0), (2,\ 0), (3,\ 0), \ldots$ は $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ -x \end{pmatrix}$ によって $(3,\ -1), (6,\ -2), (9,\ -3), \ldots$ に移ってゆく。この移り方は x の正の方向と y の負の方向が合わさった向き、すなわち図の右下へ向かう移動である。

また、たとえば y 軸上の正の方向に向かう点列 $(0,\ 1), (0,\ 2), (0,\ 3), \ldots$ は $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4y \\ 2y \end{pmatrix}$ によって $(-4,\ 2), (-8,\ 4), (-12,\ 6), \ldots$ に移ってゆく。この移り方は x の負の方向と y の正の方向が合わさった向き、すなわち図の左へ向かう移動である。

これらのことから、X 軸と Y 軸の正の方向が決まるのである。▮