行列の累乗

行列の積においては $AB \neq BA$ であることは散々述べてきた。したがって文字式で成り立つ $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ は、行列の計算においては

$$(A+B)(A+B) = A(A+B) + B(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$$

までである。これは計算にかなりの制約が課されることになる。しかし、幸運にも任意の行列 A と単位行列 E との間にはその制約がない。なぜなら

$$AE = EA = A\text{、}\quad E^2 = EE = E$$

であるから、たとえば $a^2 + 5a + 6 = (a+2)(a+3)$ と同じことができる。具体的には

$$A^2 + 5A + 6E = (A+2E)(A+3E)$$

は正しい計算である。ただし $(a+2)(a+3) = 0$ を満たす a は $-2,\ (-3)$ だけであるのに対し、$(A+2E)(A+3E) = O$ であっても、$A = -2E,\ -3E$ だけに限定されないことは繰り返し述べておこう。

以上のような注意を払わなくてよいものに、A の累乗がある。同じ行列ならば、左から掛けても右から掛けても同じことなので

$$\boxed{A^n = AA^{n-1} = A^{n-1}A\text{、}\quad A^mA^n = A^{m+n}}$$

が成り立つ。とくに 2 番目の性質は

$$A^mA^n = A^mAA^{n-1} = A^{m+1}A^{n-1} = A^{m+1}AA^{n-2} = A^{m+2}A^{n-2} = \cdots$$

のように、1 番目の性質を用いて、右側の A^n から A を 1 個ずつ左側掛け移せることから明らかであろう。ただし、そのように考えると A^0 が E であると約束しておく必要がある。

一般に A^n は E^n ほど簡単ではないにしても、$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ であれば

$$\boxed{A^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & d^n \end{pmatrix}}$$

が成り立つ。本来なら数学的帰納法などを用いて証明するものだが、A^2、A^3、A^4、$\ldots$ を計算してみれば正しいことがすぐに理解できるだろう。

行列の固有値

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して、$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を満たす実数 λ が存在するとき、λ を行列 A の**固有値**と呼び、列ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を A の**固有ベクトル**という。ただし、$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ とする。

まず、理屈抜きに固有値を求めてみよう。$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ のときの固有値は

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

を満たす λ であるから、左辺に移項して整理した

$$\begin{pmatrix} (2-\lambda)x + y \\ 3x + (4-\lambda)y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (※)$$

を、連立方程式に見立てて解けば λ が求められる。1 行目に $(4-\lambda)$ を掛けて 2 行目を引くと

$$(2-\lambda)(4-\lambda)x - 3x = 0 \quad \text{より} \quad (\lambda^2 - 6\lambda + 5)x = 0$$

が得られるので、$\lambda = 1, 5$ が求める固有値である。

$\lambda = 1$ のとき、※の 2 式はともに $x + y = 0$ であるから、たとえば $x = 1$、$y = -1$ として $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ が固有ベクトルとなる。また、$\lambda = 5$ のとき、※の 2 式はともに $3x - y = 0$ であるから、たとえば $x = 1$、$y = 3$ として $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ が固有ベクトルとなる。

さて、固有値や固有ベクトルが何の役に立つのだろうか。説明抜きに、いま求めた固有ベクトルを並べた行列を

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

として、PAP^{-1} を計算してみよう。すると

$$P^{-1}AP = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

である。行列が**対角化**されたばかりか、対角行列の成分は固有値である。これだけでも高価値の雰囲気が漂うだろう。一般に

$$\boxed{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{の固有値は、} \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc) = 0 \text{ の解}}$$

であることが知られている。また、固有ベクトルによって行列を対角化することができる。そして行列の対角化は、行列の累乗のために欠かせない道具になっているのである。

累乗と固有値

$A=\begin{pmatrix}2&1\\3&4\end{pmatrix}$ に対して A^n を求めようとすると

$$A^2=\begin{pmatrix}2&1\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&6\\18&19\end{pmatrix}、\quad A^3=\begin{pmatrix}7&6\\18&19\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}32&31\\93&94\end{pmatrix}$$

ぐらいを計算しただけでも嫌気がさすだろう。このようなときに固有ベクトルが利用できる。

さっき、この A に対して $P=\begin{pmatrix}1&1\\-1&3\end{pmatrix}$ を与えると、$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0\\0&5\end{pmatrix}$ になることが分かった。対角化された行列は簡単に n 乗でき、それは

$$(P^{-1}AP)^n=\begin{pmatrix}1&0\\0&5\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}1&0\\0&5^n\end{pmatrix}$$

である。ところで、$P^{-1}P=E$ であることから

$$(P^{-1}AP)^n=\underbrace{(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)\cdots(P^{-1}AP)}_{n\text{ 個}}=P^{-1}A^nP$$

がいえる。したがって、

$$P^{-1}A^nP=\begin{pmatrix}1&0\\0&5^n\end{pmatrix}$$

が成り立つことになり、等式の両辺に、左から P、右から P^{-1} を掛ければ A^n が求められる。よって、

$$A^n=\begin{pmatrix}1&1\\-1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&5^n\end{pmatrix}\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3&-1\\1&1\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3+5^n&-1+5^n\\-3+3\cdot5^n&1+3\cdot5^n\end{pmatrix}$$

である。実際、$n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ に対して正しい答になっているのが分かるだろう。

* * *

上の例が示すように、行列の対角化の 1 つの効用は、計算の省力化につながることである。ここで詳しく述べることはできないが、対角成分以外が 0 の対角行列の他に、対角成分の左下半分が 0 の行列など、いくつかの "標準形" と呼ばれるものがある。そういった "道具" が自在に使えてこそ、行列の真価が発揮される。ここで扱っている行列は「線形代数」のほんの入り口に過ぎないのである。▌

固有値、固有ベクトルとは

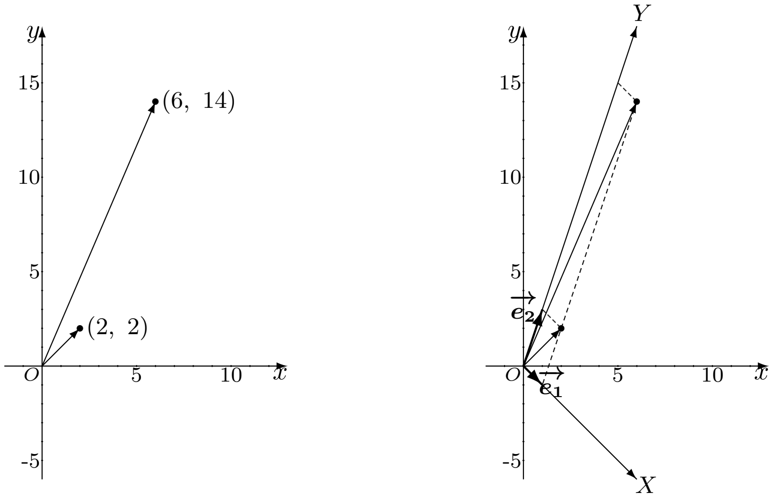
では、固有値や固有ベクトルとは何だろうか。その前に、1 つの事例を挙げておこう。

まず、$A=\begin{pmatrix}2&1\\3&4\end{pmatrix}$ の固有値 1 に対する固有ベクトルが $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ であったこと、固有値 5 に対する固有ベクトルが $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ であったことを留めておいてほしい。その上で x-y 座標の点 $(2,\ 2)$ を

取り上げる。この点は行列 A によって

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 14 \end{pmatrix}$$

に移される。では、どのような経緯で (2, 2) は (6, 14) に移されたのだろうか。



おそらく x-y 座標の中で見たのでは分からないだろう。(2, 2) が (6, 14) へ移される経緯は、固有ベクトルによる新たな座標軸を持つ X-Y 座標で見る必要がある。実は (2, 2) は、固有ベクトルを $\overrightarrow{e_1} = (1,\ -1)$、$\overrightarrow{e_2} = (1,\ 3)$ として、$\overrightarrow{e_1}$ 方向の軸を X 軸、$\overrightarrow{e_2}$ 方向の軸を Y 軸としたときの $\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}$ である。そして、このとき (6, 14) は $\overrightarrow{e_1} + 5\overrightarrow{e_2}$ になっているのである。

さて、固有値とは $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を満たす λ であった。ふつう 1 次変換によって移される $(x,\ y)$ は、行列の計算が少し入り組んでいることから、あまり定かでない場所に移されるものである。しかしそれが $\lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$、すなわち $(x,\ y)$ の実数倍のところへ移るなら話は違ってくる。原点 O と $(x,\ y)$ を結ぶ線上に移されるとなれば、ある程度 "定か" な変換であろう。それがいまの例では $x + y = 0$ と $3x - y = 0$ の 2 つであり、これを満たす $(x,\ y)$ は、すべて移動先の定かな点となる。その代表として選ばれたベクトルが固有ベクトルなのである。