正則行列

行列の性質をいくつか見たところで、2 行 2 列の**正方行列**に絞って話を進めることにする。2 行 2 列の正方行列は連立方程式を解く際に利用でき、今後登場する図形の変換に使い勝手がよいためでもある。

さて、逆行列は連立方程式を解く際に利用したが、一般には n 次の正方行列 A に対して、単位行列を E で表すことにすると

$$AX = XA = E$$

を満たす行列 X を A の逆行列といい、A^{-1} と表すことが多い[1]。あらためて X を A^{-1} で書き直すと、上の式は

$$\boxed{AA^{-1} = A^{-1}A = E}$$

ということになる。正方行列 A に逆行列 A^{-1} があるとき、A を**正則行列**と呼んでいる。

正則行列には、まず

$$\boxed{(A^{-1})^{-1} = A}$$

という性質がある。ことばで言うならば、逆行列の逆行列はもとの行列、とでも言えばよいだろうか。このことは、先の $AA^{-1} = E$ において A を A^{-1} に読み替えた式

$$A^{-1}(A^{-1})^{-1} = E$$

の両辺に、左から A を掛けると $AA^{-1} = E$ であることから直ちに導かれる。

また、正則行列 A、B については

$$\boxed{(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}}$$

が成り立つ。このことは、$AA^{-1} = A^{-1}A = E$、$BB^{-1} = B^{-1}B = E$ であることから

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = ABB^{-1}A^{-1} = AEA^{-1} = AA^{-1} = E$$

という計算が成り立つので、$B^{-1}A^{-1}$ が AB の逆行列—すなわち $B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1}$ —であることが分かる。

これらの性質は正方行列というだけで、とくに何次の行列かは問われていないことに注意されたい。行列を成分を見ながら扱うと具体的でよい反面、計算が面倒になる欠点がある。正方行列は、

[1] “-1” は乗数ではなく、逆行列を表す記号で、インバース（inverse）と読む。

左からでも右からでも掛けることが可能なので、型を気にしなくても済む。正方行列を扱うときは、A や B と表す方が便利なことも多く、上述のような処理の仕方は有効である。

直交行列

正方行列 A とその転置行列 ${}^tA$ を考えてみよう。A は正方行列であるから、転置行列にしても行数と列数は同じである。すると、積 $A{}^tA$ を考えることができる。それは、たとえば 2 次の正方行列なら

$$A{}^tA = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix}$$

となって、ある程度整った形になるようだ。

ところで、A とその逆行列 A^{-1} の積が $AA^{-1} = E$ であるのは、それが定義だからである。しかし、A^{-1} は逆行列の名称ほどに A に対して "逆" ではない。A^{-1} は逆数的な性質を持つものの、決して $A^{-1} = \dfrac{1}{A}$ ではないからである。むしろ転置行列の方が、行と列を逆にした点で "逆行列的" かもしれない。戯（ざ）れ言はこのぐらいにしておこう。

それより $A{}^tA$ が E となることはあるだろうか。$A{}^tA = E$ とは、すなわち

$$a^2+b^2 = c^2+d^2 = 1\text{、}\qquad ac+bd = 0$$

を満たすことを意味している。4 変数に対して関係式は実質 2 種類であるから、そのような行列を特定することはできない。ただ、どのような行列であるかを調べることはできる。この場合は、$a^2+b^2=1$ という関係式から、

$$a = \cos\theta, \quad b = \sin\theta$$

としてよい。c、d も同じことなのだが、a と c は必ずしも同じ値ではないので、別の角—たとえば ϑ —を用いて $c = \cos\vartheta$、$d = \sin\vartheta$ と書く必要がある。このとき $ac+bd=0$ は

$$\cos\theta\cos\vartheta + \sin\theta\sin\vartheta = 0$$

と表せる。ところがこの式は、**三角関数の加法定理**によって

$$\cos(\theta - \vartheta) = 0$$

と同値であるから、これを満たす解として $\theta - \vartheta = \pm\dfrac{\pi}{2}$、すなわち $\vartheta = \theta \mp \dfrac{\pi}{2}$ を求めることができる。

つまり、$a=\cos\theta$、$b=\sin\theta$ と置いたことで、

$$c=\cos(\theta\mp\frac{\pi}{2})=\pm\sin\theta,\quad d=\sin(\theta\mp\frac{\pi}{2})=\mp\cos\theta$$

が決定づけられた。したがって、$A{}^tA=E$ となる正方行列 A は

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}\quad \text{または} \quad \begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

の形に限られることが分かった。このような行列 A を**直交行列**と呼ぶ。

*　*　*

直交行列という名称から、何が垂直に交わるのか気になるだろう。逆行列や転置行列は、ある行列 A と組になる相手方の行列を指すのに対して、直交行列は、単位行列のように自身が持つ性質を表している名称であることに注意してもらいたい。では、自身は直交しているのだろうか。

そこで、直交行列の 1 つが使われた連立方程式を行列で表した

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x \\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}m \\ n\end{pmatrix}$$

を例にとることにしよう。これを単に x と y を含む等式に書き直すだけでなく、いずれも $y=$ で始まる式に書き直せば

$$\begin{cases} y = -\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}x+\dfrac{m}{\sin\theta} \\ y = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}x+\dfrac{n}{\cos\theta}\end{cases}$$

となる。2 式を直線の方程式とすれば、それらの傾き $-\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$、$\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ の積が -1 となり、2 直線が直交していることが分かる。直交行列たる所以（ゆえん）である。

ただ、行列を行ベクトルや列ベクトルの組と見れば、直交行列は内積 0 の単位ベクトルになっている。本来は、この性質をもって直交行列と呼ぶのであろう。▌

行列の方程式

たとえば 2 次の正方行列 A が、$A^2=2A$ を満たしているとする。このような A は何であろうか。この場合は、移項して A を共通の行列と考えて

$$A(A-2E)=O$$

という関係式が得られる。ここから直ちに $A=O$、$A=2E$ は分かるのだが、行列の積が $AB=O$ のとき、必ずしも $A=O$、$B=O$ でないことを思い出してほしい。

実際、$A=\begin{pmatrix}a & b \\ c & d\end{pmatrix}$ とすると、$A(A-2E)=O$ は

$$\begin{pmatrix}a & b \\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a-2 & b \\ c & d-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a(a-2)+bc & ab+b(d-2) \\ c(a-2)+cd & bc+d(d-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

を満たすことであるから、たとえば $a = b = c = d = 1$、すなわち $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ も解の 1 つとなる。このことは、行列の方程式を満たす解が一般の方程式を満たす解以上に存在していることでもある。ただし、無数の解があるわけではない。

無数の解を持つ方程式は、恒等式である。行列の方程式には任意の解を持つもの、すなわち恒等式が存在している。結論から言えば、その恒等式は

$$\boxed{A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E = O}$$

である。これは実際に

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - (a+d)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + (ad-bc)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を計算すれば、間違いなく O になることを確認することができる。この関係式は**ケイリー・ハミルトンの定理**として知られている[2]。

* * *

2 次の行列式における、この簡単に導くことができる関係式に、大げさにも 2 人の名前が冠されていることには理由がある。代数の概念が十分に発達していない紀元前に発見されたものであれば、発見者の名がついても不思議ではないだろう。しかし、中学生にも確認できる程度の式なのに、なぜだろうと疑問が浮かぶかもしれない。

実は、ケイリー・ハミルトンの定理とは、n 次の行列に関してある関係式が成り立つ定理なのである。それを 2 次の正方行列に当てはめると、先のように具体的な関係式になって簡単に計算できるのである。ケイリーとハミルトンが示したのは、具体的な数値で計算するものではなく、一般的に成り立つ線形代数の性質であった。▌

ケイリー・ハミルトンの定理

たとえば、$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ において $A^3 - 4A^2 + 3A + 2E$ を計算するとき、直接 A を当てはめて計算してもよいのだが、ケイリー・ハミルトンの定理を使うために

$$a + d = 3、ad - bc = 5 \quad \text{より} \quad A^2 - 3A + 5E = O$$

を用いて、

$$A^3 - 4A^2 + 3A + 2E \;=\; A(A^2 - 3A + 5E) - A^2 - 2A + 2E$$

[2]アーサー・ケイリー（1821–1895）：イギリスの数学者、弁護士。ウィリアム・ローワン・ハミルトン（1805–1865）：イギリスの数学者、物理学者。

$$\begin{aligned} &= A(A^2-3A+5E)-(A^2-3A+5E)-5A+7E \\ &= -5A+7E \end{aligned}$$

としておけば、暗算で $\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -15 & 2 \end{pmatrix}$ を求めることができる。やや面倒な計算をしているように見えるだろうが、実際は

$$\begin{array}{rrrl|rrrr} & & & & A & -1 & & \\ \cline{5-8} A^2 & -3A & +5 &) & A^3 & -4A^2 & +3A & +2 \\ & & & & A^3 & -3A^2 & +5A & \\ \cline{5-8} & & & & & -A^2 & -2A & +2 \\ & & & & & -A^2 & +3A & -5 \\ \cline{6-8} & & & & & & -5A & +7 \end{array}$$

のように、多項式の剰余を抜き出したに過ぎない。