行列の性質

単に行列 A、B といった場合、行数や列数に触れなければ

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}、\quad B=\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{pmatrix}、\quad \ldots$$

など、さまざまな行列を考えることになるだろう。ところで、行数・列数が互いに等しい行列は**同型**であるという。行列の和を計算するには、対象の行列が同型でなければならないが、積を計算する場合は同型である必要がない。それどころか、同型では積が定義できない場合もある。たとえば積 $(a \quad b)(c \quad d)$ は定義されない。とかく行列の演算は気難しい。そういった点に注意しながら、しばらく行列の性質を調べてみよう。

まず、行列の和と差は同型のときに限り定義される。それは、同じ位置の成分について計算する必要があるからだが、本質は実数の計算と大差ない。よって、以下の法則

$$\begin{aligned} &A+B=B+A && \text{(交換法則)} \\ &(A+B)+C=A+(B+C) && \text{(結合法則)} \\ &A+O=O+A=A && \text{(零行列の性質)} \end{aligned}$$

が成り立つ。

次に、$A+X=O$ を満たす行列 X は、すべての成分の正負が行列 A と逆になっているので、それを $-A$ で表すことにすると

$$A+(-A)=(-A)+A=O$$

である。

行列の実数倍についても、各成分の実数倍に過ぎないので、kA と書いたら A のすべての成分が k 倍される。したがって実数 $k,\ a,\ b$ に対して $k(a+b)=ka+kb$ が成り立つように、行列においても

$$k(A+B)=kA+kB$$

が成り立つ。

行列の乗法に関する性質

行列の積の基本は $(a_1 \quad a_2)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}=a_1b_1+a_2b_2$ であった。左の行を右の列に掛ける規則なので、積 AB が定義できる場合とは、行列 A の行数と行列 B の列数に過不足がないときであり、か

つ、それらの成分数が等しいときである。

さて、

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}、\quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

の場合、$AB = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ である。A の 1 行（3 成分）に対し、B は 1 列（3 成分）だから、積が定義できる条件を満たしている。では、BA は定義できるだろうか。BA は

$$BA = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}$$

である。このとき、B は 3 行で各行の成分は 1 個、A は 3 列で各列の成分は 1 個である。つまり、各行各列の成分数は等しい。よって、BA は定義でき

$$BA = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1a_1 & b_1a_2 & b_1a_3 \\ b_2a_1 & b_2a_2 & b_2a_3 \\ b_3a_1 & b_3a_2 & b_3a_3 \end{pmatrix}$$

と書けばよいことになる。添数のせいで見栄えは複雑になっているものの、左の行位置と右の列位置の組み合わせが、そのまま積の行列位置となっていることに注意されたい。

何か不思議な結果に思えるだろうが、行列は

$(m \times l$ 行列$)$ と $(l \times n$ 行列$)$ に乗法が定義でき、積は $(m \times n$ 行列$)$ になる

と言えるのである。

行列の乗法では交換法則が成り立たないことは既に見ているので、結合法則や分配法則について考えよう。結合法則は

$$A(BC) = A(BC)、\quad (kA)B = k(AB) = A(kB)$$

が成り立つことであり、分配法則は

$$A(B + C) = AB + AC、\quad (A + B)C = AC + BC$$

が成り立つことである。

行列 A, B, C に積 ABC が定義できるのは、A, B, C がそれぞれ $(m \times l$ 行列$)$, $(l \times n$ 行列$)$, $(n \times p$ 行列$)$ となる条件が付くものの、$(AB)C$ の順に掛けても $A(BC)$ の順に掛けても、$(m \times p$ 行列$)$ になることは間違いない。

また、分配法則は「足してから掛ける」ことと「掛けてから足す」ことは同じであるという主張である。いずれにせよ足すことがあるので、その部分は行列が同型でなければならない。たとえば B、C が $m\times n$ 行列であったなら、A は $p\times m$ 行列でなくてはならないが、その場合は、$B+C$ が先でも AB、AC が先でも $p\times n$ 行列になる。

*　*　*

行列 $(\,a\,)$ と実数 a は別物であることに注意しよう。たとえば

$$(\,a\,)(\,x \quad y \quad z\,) = (\,ax \quad ay \quad az\,)$$

となるのは、$(\,a\,)$ が定数と同じ扱いだからではない。$(\,a\,)$ が 1 行 1 列 で、$(\,x \quad y \quad z\,)$ が 1 行3 列だから、行列の積の規則に従って 1 行 3 列の行列になっているのである。だから、$(\,x \quad y \quad z\,)(\,a\,)$ であれば、1 行 3 列と 1 行1 列の積になるので、積は定義されないのである。

一方で aA は定数 a と A の積であり、Aa は A と定数 a の積である。ここでは掛ける方向に注意しているが、

$$a(\,x \quad y \quad z\,) = (\,x \quad y \quad z\,)a = (\,ax \quad ay \quad az\,)$$

であることは異論がないであろう。▮

零因子

行列の乗法において交換法則が成り立たないことは何度も述べた。さらに行列の乗法には、実数の計算とは異質な性質がある。実数の乗法では $AB=0$ が成り立つことと、$A=0$ または $B=0$ であることは同値である。しかし行列においては

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}、\quad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$$

の例が示すように、$A\neq O$、$B\neq O$ であっても $AB=O$ となることがある。このような A、B は**零因子(れいいんし)**、もしくは**ゼロ因子**と呼ぶ。もちろん $AB=O$ であっても、$BA=O$ になるわけではない。この例で実際に確かめるとよいだろう。

しかし、$A=O$ または $B=O$ であれば必ず $AB=O$ となるので、$AB=O$ は $A=O$ または $B=O$ の必要条件でしかないことに注意しよう。

転置行列

感覚的な表現になってしまうが、実数には「x と $\dfrac{1}{x}$」や「x と $-x$」のように相反する組がある。もちろん行列でも、逆行列や -1 倍のように相反する組がある。加えて行列には、行と列を入れ換

えた**転置行列**という考え方がある。A の転置行列を ${}^tA$ で表すと

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{に対して} \quad {}^tA = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

である[1]。この組は、行と列が入れ替わっている点で相反する組のように見えるが、もし $b = c$ であれば実際は ${}^tA = A$ であり、相反するという言い方は少々おかしい。言い方の善し悪しは別にして、${}^tA = A$ を満たす行列 A は**対称行列**と呼ばれる。

また、行と列を入れ換えたとき ${}^tA = -A$ となることもある。これを満たす行列 A は**交代行列**と呼ばれる。交代行列では

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$$

が成り立つことなので、A が交代行列である条件は $a = d = 0$、$b + c = 0$ と同じことである。

転置行列は、単に行と列の成分を入れ換えただけであるから、${}^t({}^tA) = A$ となることや、${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$ となることはほとんど「自明な性質」と言ってよい。ここで、唐突であるが任意の行列 A を用いて

$$X = \frac{1}{2}(A + {}^tA)、\quad Y = \frac{1}{2}(A - {}^tA)$$

と置いてみよう。こうすると $A = X + Y$ である。また、このとき「自明な性質」によって

$${}^tX = \frac{1}{2}({}^tA + A)、\quad {}^tY = \frac{1}{2}({}^tA - A)$$

であるから、${}^tX = X$、${}^tY = -Y$ が成り立っている。すなわち、X は対称行列で Y は交代行列である。このことは、任意の行列 A は対称行列 X と交代行列 Y の和で表されることを意味するのである。

具体的に $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ とすると、${}^tA = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$ であるから、

$$\begin{aligned} X = \frac{1}{2}(A + {}^tA) &= \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \\ Y = \frac{1}{2}(A - {}^tA) &= \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

より、確かに X は対称行列、Y は交代行列になっている。そして、

$$X + Y = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = A$$

が成り立っていることが分かる。

[1] ${}^tA$ は “transposed A” か “転置 A” と読むとよい。