連立方程式を行列で解く

前回、連立方程式

$$\begin{cases} 5x-2y &=& 11 \\ 2x+4y &=& 14 \end{cases}$$

を解く際、係数を含めて数値だけに注目することで、行列という見方を取り入れたのだった。すると、連立方程式を解く行為は

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 11 \\ 14 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

のような変形を行うことに他ならない。

この変形はどのように行われたのだろうか。それを知るためにも、一般の連立方程式がどのように解かれているか考えてみよう。まず連立方程式

$$\begin{cases} ax+by &=& m \\ cx+dy &=& n \end{cases}$$

は、加減法を用いて x または y を消去すれば簡単に解ける。その過程を示すことはしないが、解いた結果は $ad-bc \neq 0$ のとき、

$$x=\frac{dm-bn}{ad-bc}, \quad y=\frac{-cm+an}{ad-bc}$$

である。これは行列の積の定義から

$$x=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}, \quad y=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$$

と表すことができ、さらに $\begin{pmatrix} d & -b \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} -c & a \end{pmatrix}$ を 1 つの行列にまとめて

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$$

のように書くことができる。すなわち、行列で表された連立方程式を解くことは

$$\boxed{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}}$$

のように書き換えることであるといえるのである。

*　*　*

連立方程式の解は、行列の形を変えて得られることが分かった。言い換えればこれは、連立方程式の解の公式である。つまり、与えられた連立方程式の係数と定数を形式的に当てはめ、それを計算すれば解が得ら

れるのであるが、2 次方程式の解の公式とは少し雰囲気が異なるようでもある。それはおそらく、2 次方程式の解の公式が、言ってみれば直接的に解を求めているのに対して、連立方程式の場合は結局は行列の計算をするため、回り道をしながら解を求めているように感じるからだろう。

それならば、行列の形式を取らないで

$$\begin{cases} x = \dfrac{dm - bn}{ad - bc} \\ y = \dfrac{-cm + an}{ad - bc} \end{cases}$$

と書いてしまえば、これが直接に連立方程式の解の公式となるのである。しかし、これを公式として目にすることはないに違いない。それは、式が少々煩雑であることと、$ad - bc = 0$ のときに用いることができないことによる。$ad - bc$ の値を気にしながら公式を使うより、解き方の手順を覚える方がはるかに有用だからである。▮

逆行列

先ほど求めた x, y の解を、単位行列を書き加えて

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} \qquad (※)$$

と見ることにする。このときの右辺は、もとの連立方程式の右辺に $\dfrac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ が掛けられていることになるのだが、方程式の性質上、もとの連立方程式の左辺にも同じものが掛けられていたと見るべきである。すなわち、もとの方程式は両辺に同じものを掛けて、

$$\frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$$

の帰結として※の解になったと見るのである。すると、両辺の比較から

$$\frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

がいえる。

このことは、任意の行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と $\dfrac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ の積が単位行列になることを意味している。一般に数 a とその逆数 $\dfrac{1}{a}$ の積が必ず 1 になることに似て、行列における逆数を表していると考えてよいだろう。そこで、

$\dfrac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の**逆行列**という

ことにし、逆数の性質を備えた行列と見ることにしよう。もちろん $ad-bc$ が分母にある以上、$ad-bc\neq 0$ という条件がついていることを忘れてはならない。したがって、$ad-bc=0$ のときは、逆行列は存在しない。$a=0$ のとき、逆数 $\dfrac{1}{a}$ が存在しないのと同じことである。

行列の乗法について

行列の積を

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix}=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}$$

で定義した上で、連立方程式は行列を用いて

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 11 \\ 14 \end{pmatrix}$$

のように記述した。$\boxed{}$は計算の 1 つの組み合せを示している。このようにしておくと、たとえば 2 組の連立方程式

$$\begin{cases} 5x-2y &= 11 \\ 2x+4y &= 14 \end{cases} \quad \text{と} \quad \begin{cases} 5\tilde{x}-2\tilde{y} &= -7 \\ 2\tilde{x}+4\tilde{y} &= 2 \end{cases} \quad \text{を}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & \tilde{x} \\ y & \tilde{y} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 11 & -7 \\ 14 & 2 \end{pmatrix} \qquad (☆)$$

と書いても、計算の組み合せはきちんと定まる。すると、両辺に $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ の逆行列 $\dfrac{1}{24}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ を掛けることで

$$\begin{pmatrix} x & \tilde{x} \\ y & \tilde{y} \end{pmatrix}=\frac{1}{24}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 11 & -7 \\ 14 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

のように、一度に 2 つの連立方程式が解けるだろう。これが正しい解であることは、☆に代入して計算した

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 11 & -7 \\ 14 & 2 \end{pmatrix}$$

から確認できるはずだ。

さて、このように書いてしまうと行列の成分はすべて数値であるから、どの数値が係数でどの数値が定数かなどということは意味がなくなって、ただ数値を乗法の定義に従って計算しただけに見える。そうに考えると、左側の行列の成分は行ごとに組み合わせ、右側の行列の成分は列ごとに組

み合わせて、その上で互いに掛け合わせなくては意味がないことになる。このことは、左側の行列と右側の行列を交換して掛けても、

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

のように掛け合わせる数の組が変わるので、ほとんどの場合で計算結果が異なる。すなわち行列の乗法は、積の定義の仕方から、一般に交換できないと考えた方がよい。

* * *

では、どういうときに乗法の交換が可能なのだろうか。2 つの行列を $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix} u & v \\ w & x \end{pmatrix}$ とすると

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u & v \\ w & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & v \\ w & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

が成り立つことだから、両辺の積の成分を比較して

$$\begin{cases} au + bw = au + cv & (1) \\ av + bx = bu + vd & (2) \\ cu + dw = aw + cx & (3) \\ cv + dx = bw + dx & (4) \end{cases}$$

が成り立てばよいことになる。

まず、(1), (4) はいずれも $bw = cv$ なので、$v, w \neq 0$ のときは、これを $\dfrac{b}{v} = \dfrac{c}{w}$ で表しておく。また、(2), (3) を移項して整理すると、それぞれ

$$(a-d)v = b(u-x)、(a-d)w = c(u-x) \quad (★)$$

を得る。そこで $u \neq x$ のとき、これをまとめて $\dfrac{a-d}{u-x} = \dfrac{b}{v} = \dfrac{c}{w}$ で表しておく。このことから基本的に

$$(a-d):(u-x) = b:v = c:w$$

であれば、乗法において交換法則が成り立つといえるのである。

ところで、$u = x$ の場合はどうだろうか。この場合は★より、$a = d$ であれば他の成分は何でもよい。つまり $\dfrac{b}{v} = \dfrac{c}{w}$ を満たせばよいだけである。実際、$\begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u & kb \\ kc & u \end{pmatrix}$ および $\begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u & kb \\ kc & u \end{pmatrix}$ を計算すると、いずれも同じ結果になることが分かる。

これ以外にも、v や w が 0 のときに、乗法の交換が可能な条件を調べてもよいのだが、行列の乗法においては交換できないことがむしろ自然なのである。そこで、このことについては、これ以上細かく述べることはしない。ただ、もし $v = 0$ のときの条件を知りたければ、v と比較されている b を同時に無視して

$$(a-d):(u-x) = c:w$$

が条件であると考えればよい。理由は $v = b = 0$ として計算すれば分かることである。▮