連立方程式

いきなりではあるが、連立方程式を具体的に解くところから始めよう。

$$\begin{cases} 5x - 2y &= 11 \\ 2x + 4y &= 14 \end{cases}$$

解く方法はいくつかあり、たとえば次のような解き方はよく行われることである。

$$\begin{cases} 5x - 2y &= 11 \\ 2x + 4y &= 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10x - 4y &= 22 \\ 2x + 4y &= 14 \end{cases} \Rightarrow 12x = 36 \Rightarrow \begin{cases} x &= 3 \\ y &= 2 \end{cases}$$

ここでは、1 行目の式を 2 倍して辺々足している。その結果 x だけの式になり、x を求めることができる。y は、x の値を最初の等式に代入して求めた。ところで、解を求めるために必要なものは左辺の係数と右辺の値だけであって、x や y は指標に使われているに過ぎないことに気づいただろうか。つまり

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ と } \begin{pmatrix} 11 \\ 14 \end{pmatrix} \text{ を使って } \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ を求めた}$$

のである。そのように考えると、先の連立方程式は、$=$ の代わりに $|$ を使って

$$\left(\begin{array}{cc|c} 5 & -2 & 11 \\ 2 & 4 & 14 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 10 & -4 & 22 \\ 2 & 4 & 14 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 12 & 0 & 36 \\ & & \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

のような計算が行われたと見ることもできる。ここでは数 0 を補うことで、x、y の "位置" を明確にしていると思ってよいだろう。

行列の定義

いま連立方程式を解くために、数値だけを取り出して

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ や } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

のように並べたのだが、このようなものを**行列**と呼ぶ。日本語では $(a \quad b)$ や $(c \quad d)$ のような並びを**行**、$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ や $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ のような並びを**列**と呼ぶ習慣なので、それらを組み合わせたものを行列と呼ぶのは言葉的には正しいのだろう。しかし、並べられた係数が連立方程式の基盤であると考えれば、英語での呼び方である**メイトリクス**[1] と呼ぶのがふさわしいと思われる。

[1] matrix = 母体。

行列の加法と減法

行列は大きなものになると何百、何千もの行や列を抱えることがある。急に大きな行列を扱うのは無理があるので、連立方程式の基になった2行2列の行列を中心に扱うことにする。行列は数学の対象であるから、数の計算のように加法と減法が定義できる。

$$\boxed{\begin{aligned}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} \end{pmatrix}\end{aligned}}$$

要するに、同じ位置にある成分どうしの足し算と引き算である。慣れないと a_{12} のような表記に戸惑うかもしれない。a_{mn} と書いたら、m 行 n 列に位置する**成分**を表す。この定義から行列は、行数と列数が一致していないと加法や減法ができないことになる。

行列の定数倍

行列の定数倍は次のように定義される。

$$\boxed{k\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{pmatrix}}$$

行列が連立方程式の母体であることを考えれば、連立方程式を解く過程で特定の等式だけを定数倍できたように、特定の行だけ定数倍することがあってもよいと思うかもしれない。しかし、それはまた別の話となる。行列の定数倍は、行列のすべての成分について行われるのである。

ここまでの定義によって、たとえば

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-2\cdot 1 & 3-2\cdot(-3) \\ 5-2\cdot 0 & -1-2\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 9 \\ 5 & -9 \end{pmatrix}$$

のような計算が可能となる。

行列の乗法

行列の乗法の基本は次の式で定義される。

$$\boxed{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}}$$

この定義はいささか不思議な感じを持つだろう。しかし、これこそ行列が連立方程式の母体であることを認識させる定義になっているのである。なぜなら

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 5x - 2y, \qquad \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2x + 4y$$

であり、係数を表す行列と未知数を表す行列の積で 1 つの等式を表すからである。とくに、これらは連立方程式のそれぞれの式であるから、ひとまとめにして

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x - 2y \\ 2x + 4y \end{pmatrix}$$

のように書くとよい。

このことから、一般に 2 行 2 列の行列と 2 行 1 列の行列との積は

$$\boxed{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}}$$

と定義するのがよいと思われる。慣れるまではどれとどれを掛けるのか迷うだろうが、基本は

左の$\boxed{\text{行}}$の成分と、右の$\boxed{\text{列}}$の成分を、それぞれ掛け合わせる

ことである。この後しばらくは 2 行 2 列程度の行列を中心に扱う。成分を a_{11}、a_{12} などと書くのも面倒であるから、とくに誤解が生じなければ、成分は a、b などの 1 文字で済ませることにしたい。

さて、このような書き方が定義できると、はじめに示した連立方程式は

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 14 \end{pmatrix}$$

と書けることになり、連立方程式の解を求めることは最終的に

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

を導けばよいことになるだろう。

単位行列と零行列

最初に、連立方程式を係数と値だけに注目して

$$\left(\begin{array}{cc|c} 5 & -2 & 11 \\ 2 & 4 & 14 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

のように解いたことを思い出してほしい。この表し方を見ると、解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ ではなく } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

と表しているようである。行列の積の定義で計算すると $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ であるから、$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ は計算に影響を与えていない。これは一般の乗法における 1 の性質と同じである。そこで

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ を}\textbf{単位行列}\text{という}}$$

ことにし、行列の計算における 1 の役割と考えよう。

すると、一般の加法における 0 の役目を果たす行列もすぐに示すことができる。それは $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ で、これが

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

を満たすことは明らかだろう。この行列は**零行列（れいぎょうれつ）**、もしくは**ゼロ行列**と呼ばれ、行列の計算における 0 の役割をするものである。

* * *

ここで考えている単位行列と零行列は 2 行 2 列である。行列の規模が大きくなれば、任意の行数と列数を持つ行列が登場するが、その場合でも単位行列は右下へ向かう対角線だけが 1 の行列、零行列はすべての成分が 0 の行列である。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & 1 \end{pmatrix}、\quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix}$$

しかし、この記述はいささか煩わしい。そこで、単位行列には 1 を連想させる I や E を、零行列には O をあてがうことがしばしばである。単位行列に E を使うのは、おそらくドイツ語の 1(ein) からの連想であろう。

とくに単位行列は対角線に 1 が並ぶ特性上、行列の成分は正方形を形づくる。正方形に配置された n 行 n 列の数列は ***n* 次の正方行列**と呼ばれる。▌