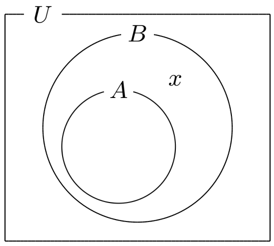
必要条件・十分条件

条件を含んだ命題：$A \Rightarrow B$ を考えよう。条件によって、命題は真にも偽にもなり得る。偽の命題はほとんど価値がない。一方、真の命題はしばしば**定理**として威光を放っている。したがって非常に価値が高い。ここで、次の定義を置こう。

> $A \Rightarrow B$ が真（$A \subset B$）のとき
>
> ・A は B であるための**十分条件**
>
> ・B は A であるための**必要条件**　という

何を言いたいか分からなければ、集合の包含関係を思い出してほしい。そうすれば、かっこ内（$A \subset B$）の意味がはっきりするだろう。



$A \Rightarrow B$ が真であるとは、集合 A が集合 B に完全に含まれている、すなわち $A \subset B$ のことである。つまり、A の要素は全て、間違いなく B の要素になっている。一方、B の要素は必ずしも A の要素とは言えない。要素 x が A の外にあるかもしれないからである。

それはよいとしても、なぜ A が十分条件、B が必要条件と呼ばれるのか気になるところだ。しかし、この言葉遣いはいたって常識的で、$A \Rightarrow B$ が真であれば A の要素は同時に B の要素でもあるので、A の要素は B の条件を十分に満たしている。別の言い方をすれば、B であることを示したければ、「A を示せば十分」なのである。

一方、B の要素は A の要素でないこともあるので、B の要素は A の条件を完全に満たしていない。ただし、A の条件を満たす要素は全て含んでいる。別の言い方をすれば、A であることを示したければ、少なくとも「B が示されることが必要」なのである。

もっとも、この説明では腑に落ちないと思われる。そんなときは、数学の勉強方法としては好ましくないが、丸覚えかつ機械的な処理で乗り切るしかない。丸覚えの繰り返しでも、数多くの例題に触れていれば、自然と理解が深まると思うからだ。

なぜ、機械的に丸覚えをしてまでも、必要条件・十分条件の違いを理解する必要があるのだろう。それは、いくつかの例を示しながら説明することにしよう。

必要条件・十分条件の例

たとえば、$A = \{x \mid 1 \leqq x \leqq 2$、$x$ は実数 $\}$、$B = \{x \mid 0 \leqq x \leqq 4$、$x$ は実数 $\}$ としよう。x が $1 \leqq x \leqq 2$ の範囲にあれば、x は $0 \leqq x \leqq 4$ の範囲に含まれるのは明らか、すなわち $A \subset B$ なので、$A \Rightarrow B$ は真である。したがって、

> $1 \leqq x \leqq 2$ は、$0 \leqq x \leqq 4$ であるための、十分条件
> $0 \leqq x \leqq 4$ は、$1 \leqq x \leqq 2$ であるための、必要条件

であるという。あくまでも定義に機械的に従ったにすぎない。

実際、x が $0 \leqq x \leqq 4$ の範囲にあることを示すためには、x が $1 \leqq x \leqq 2$ の範囲にあることを示しても、十分に役目を果たすことになる。また、x が $1 \leqq x \leqq 2$ の範囲にあることを示すためには、少なくとも x が $0 \leqq x \leqq 4$ の範囲にあることが必要である。

このように書くと、必要や十分の言葉遣いがいかにも自然に思えるだろうが、実際はそうでもない。日常の言い方にとらわれず、$A \subset B$ が前提として成り立っているかどうかを見ないといけない。

もう一例を見ることにしよう。方程式を解く際、式の変形は当然のごとく行っている。たとえば $x - 4 = \sqrt{x+8}$ を解くとき、両辺を 2 乗したのち

$$\begin{aligned}
x - 4 &= \sqrt{x+8} \ \ldots (X) \\
(x-4)^2 &= x + 8 \\
x^2 - 9x + 8 &= 0 \\
(x-1)(x-8) &= 0 \\
x &= 1,\ 8 \ \ldots (Y)
\end{aligned}$$

とするであろう。そして、$x = 1$ を元の方程式に代入したとき、$-3 = \sqrt{9}$ は解として不適切なので、$x = 8$ だけが解である。このように見ると、Y は X の解を正しく求めるために必要な過程であり、それゆえ、Y は X であるための必要条件と言える。もっとも、言葉遣いとして「Y は X の解を十分含んでいる」としても、さほど違和感はないと思われるので、言葉遣いだけで判断する際は十分な注意がいるだろう。

この場合 Y は、X の正しい解以外も要素として持っているので $X \subset Y$ である。したがって最初に示した定義どおり、Y は X であるための必要条件であることが明確である。

ところで、方程式 $x - 4 = \sqrt{x+8}$ の解は $x = 8$ であるから、これら 2 式は全く同じことを述べている。$x = 8$ を Z とすれば、$X \subset Z$ かつ $Z \subset X$ であるから、X と Z は互いに必要条件かつ十分条件になっている。このようなとき、X は Z の、同じことであるが Z は X の、**必要十分条件**と呼ぶ。また、必要十分条件とは、結局は同じことを述べているので**同値**ともいい、$X \Leftrightarrow Z$ と書く。

* * *

この節の初めに「$A \subset B$ なので、$A \Rightarrow B$ は真」と書いたが、やや雑な表現をしてしまった。$A \subset B$ は集合 A と集合 B との関係であるから、A、B をそのまま $A \Rightarrow B$ に使ったのでは、「集合 A ならば集合 B である」と言っているようなものである。たとえば「自然数の集合ならば整数の集合である」と言っても、正しい意味はそれとなく伝わるものだ。おそらく「(x が)自然数の集合(に含まれる)ならば(x は)整数の集合(に含まれる)である」と言いたいのだと分かる。

私もそれは承知しているのだが、$A \Rightarrow B$ が真であることが、A、B を集合 A'、B' で表して $A' \subset B'$ となることに対応させているので、正確に表現すると少しくどい表現になってしまう。軽く読み流してもらうためにも、横着をさせてもっらた。▮

同値関係

以上のように必要条件・十分条件を定めることができたとしても、それが何だというのか。単に、命題に含まれる条件の包含関係を表しているに過ぎないようにも見える。では、

$x + \dfrac{1}{x} = 4$ のとき、$x^2 + \dfrac{1}{x^2}$ の値を求めよ。

という問題を考えてみよう。これは両辺を 2 乗して

$$\begin{aligned} \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 &= 4^2 \\ x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} &= 16 \\ x^2 + \frac{1}{x^2} &= 14 \end{aligned}$$

とすればよく、解の不適切さを調べる必要がない。なぜなら、この式変形は同値変形だからである。

一方、先の方程式で解の不適切さを調べる必要が生じたのは、2 乗することで同値であることが崩れたからである。X が正しい等式になるためには、根号の中が負の値にならないよう $x > -8$ の条件と、右辺が負の値にならないため、左辺も負の値にならない $x > 4$ の条件が必須となっている。条件は共通部分をとって、X は

$$x - 4 = \sqrt{x+8} \quad \text{かつ} \quad x > 4 \ \ldots (X')$$

と書くのが正しかったのである。それに対して、両辺を 2 乗しただけの

$$(x-4)^2 = x-8 \ \ldots (Y')$$

は、「かつ　$x > 4$」が抜け落ちているため、包含関係は $X' \subset Y'$ となってしまった。Y' は、X' から条件を減らしのだから、包含関係は逆ではないかと思ってはいけない。X' は、Y' と「かつ $x > 4$」の共通部分であるから、その共通部分は Y' に含まれているはずである。したがって、2 乗した時点で Y' は X' であるための必要条件となり、同値とは言えなくなったのである。そのため、Y' からの帰結である「$x = 1, 8$」の十分性、すなわち

$$x = 1,\ 8 \quad \Rightarrow \quad x - 4 = \sqrt{x+8}$$

を示す必要が生じたのであるが、この命題が真であるためには $x = 8$ でないと困るのである。

実際の証明において

まるで重箱の隅をつつくように必要条件・十分条件を調べてみたが、方程式の例は注意を払っていれば済むことであって、必要条件・十分条件を考えるまでもないと思えるだろう。実際、方程式を解く場合はそれで構わないのである。では、必要条件・十分条件を使わなければならない状況とはどういうものだろうか。

その一つに証明がある。たとえば、○○ならば△△であることを示さなくてはならないとき、もっとも分かりやすいのは

$$○○ \quad \leftrightarrow \quad ●● \quad \leftrightarrow \quad ■■ \quad \leftrightarrow \quad □□ \quad \leftrightarrow \quad △△$$

のような同値関係が見つけられることだ。そうすれば、○○から一方通行で△△へ進んでもよいし、○○と△△双方から共通の、たとえば■■へ進んでもよい。

しかし、同値関係は必ずしも見つけられる保証はない。そのようなときは、まず、一方通行の ○○ $\rightarrow$ △△ を示し、次に一方通行の ○○ $\leftarrow$ △△ を示すことで、結果的に ○○ $\leftrightarrow$ △△ を示せばよいのである。先の根号を含む方程式は、まさにこのことだったのである。

ところが、数学における証明は同値変形だけに止まらない。むしろ、等式や不等式を同値変形することで証明がなされる方が珍しいかもしれない。中学・高校の数学ではあまり目にすることはないだろうが、実際に、同値変形でない証明の例を取り上げてみよう。

問） k を正の偶数とする。$m > n \geqq 0$ を満たす m, n によって、$k = m^2 - n^2$ で表される k は正の 4 の倍数すべてである。

問題の意味がつかみづらいときは、いくつかの具体例を調べるのがよいだろう。たとえば、$m = 7$, $n = 4$ なら $k = 7^2 - 4^2 = 33$ だと k が偶数でないので不適。$m = 7$, $n = 5$ なら $k = 7^2 - 5^2 = 24$ だからよし。$m = 8$, $n = 2$ なら $k = 8^2 - 5^2 = 60$ だからよし。

さらにいくつかの $m^2 - n^2$ を調べると、どうやら偶数になるときは 4 の倍数になるようである。証明したいのは、単に 4 の倍数になるだけでなく、すべての 4 の倍数になっていることらしい。証明を見ることにしよう。

解）［必要性］　$k = (m + n)(m - n)$ であるから、k は 2 数 $m + n$, $m - n$ の積である。2 数の差 $(m + n) - (m - n) = 2n$ は偶数なので、$(m + n)$ と $(m - n)$ はともに偶数かともに奇数であるが、k は偶数であるから $(m + n)$ と $(m - n)$ はともに偶数でなければならない。よって、k は 4 の倍数となる。

［十分性］　$k = 4z$ $(z \geqq 1)$ と表せば、k は 4 の倍数すべてである。ここで、$m = z + 1$、$n = z - 1$ とおけば $m > n \geqq 0$ である。このとき、$m^2 - n^2 = (z + 1)^2 - (z - 1)^2 = 4z = k$ である。

問題の意味を理解しないと、［必要性］を示せば証明が終わるように感じるだろう。しかし［必要性］で示したことは、与えられた条件のもとで $k = m^2 - n^2$ が 4 の倍数になることであって、k が "すべての"4 の倍数になることは言っていない。具体的には、$k = 24$ や $k = 60$ になることはあっても、$k = 400$ にはならないかもしれないからだ。

そこで、4 の倍数に漏れがないことを示すために［十分性］を示す必要がある。そのために、$m^2 - n^2$ がすべての 4 の倍数を取れることを、m, n を適当に[1]選べば、k は与えられた条件のもとですべての 4 の倍数になることを示しているのである。

[1]もちろん "適切に" を意味する数学用語である。