命題

私たちは普段から「明日[1]は雨が降るだろうか」とか、「今度の新製品は 1 万円より高いだろうか」など、正しいか正しくないか判断に迷うことをよく口にしている。数学の世界でも同じく、「解 x は正の値だろうか」とか「この図形は平行四辺形だろうか」とか考えるものである。

しかし、数学の世界は現実の世界よりはるかに厳格である。それは

正しいか、正しくないかが明確に定まるものしか扱わない

ことである。いまの例では、正の値かどうは 0 を基準に明確に定まるし、平行四辺形かどうかも確たる定義が存在している。また、新製品が 1 万円より高いかどうかも（1 万円）$<$（新製品の値段）の判断であるから、誰の目にも明らかに分かる。

ところが、「明日は雨かどうか」は微妙である。おそらく気象庁では、様々な気象状況に定義があるだろうから、雨に対する線引きは明確と思われる。しかし、私たちの日常の感覚では、どの程度の降水を雨とするかは人それぞれかもしれない。もっとも、「明日は雨かどうか」という**文**は予想であるから、この文を口にした時点では正しいのか正しくないのは分からない。もし、正誤をはっきりさせたければ「昨日は雨だったかどうか」としなければならないだろう。

いずれにせよ数学では、

真（しん）か**偽**（ぎ）が明確になる文を**命題**と呼ぶ

ことにし、命題のみを議論の対象とするのである。

命題の真偽

命題の簡単な例は、たとえば

$$
\begin{aligned}
&\text{命題 } P : 5 \text{ は正の整数である} \quad \to \quad \text{真} \\
&\text{命題 } Q : \text{平行線は交わる} \qquad\qquad \to \quad \text{偽}
\end{aligned}
$$

のようなものだ。重箱の隅をつつくなら、**非ユークリッド幾何**においては平行線が交わることがあるので、何の幾何学を論じているか、前提をはっきりさせる必要がある。大抵は数学の慣例的な常識があるので、命題 Q の前提は一般の幾何学で考えていると思ってよい。

[1] “あす” と読めば次の日の “一日”、“あした” と読めば次の日の “朝” を指すらしい。元日と元旦の関係と同じである。

とは言うものの、曖昧（あいまい）さなくすためにも前提を書く命題は多い。たとえば

$$\begin{array}{lll} \text{命題 } L : \text{実数 } x \text{ において、} x > 4 \ \Rightarrow \ x^2 > 16 & \to & \text{真} \\ \text{命題 } M : \text{実数 } x \text{ において、} x < 4 \ \Rightarrow \ x^2 < 16 & \to & \text{偽} \\ \text{命題 } N : \text{平行線において、錯角は等しい} & \to & \text{真} \end{array}$$

などである。多くの命題は「（なんたら）ならば（かんたら）である」という表現をし、記号 “$\Rightarrow$” を用いて「（何たら）$\Rightarrow$（かんたら）」と書く。（なんたら）を**仮定**、（かんたら）を**結論**と言う。命題 L は、実数であることが明らかならば、「$x > 4 \Rightarrow x^2 > 16$」とだけ書けばよく、$x > 4$ が仮定で $x^2 > 16$ が結論となる。

命題 N には “ならば” が書かれていないが、「平行線に直線が交わっているならば、錯角は等しい」と読み替えれば、仮定と結論がはっきりしている命題であることが分かる。

命題の真偽で問題となることは、その見極めであろう。命題 L の直後に命題 M を見ると、うっかり真と思ってしまうかもしれないが、$x < 4$ であっても $x = -5$ ならば、$x^2 < 16$ でないことは明らかである。このように命題が偽になるときは、少なくとも 1 つの例外がある。それを**反例**と呼ぶが、反例がただ 1 つしかなくても、反例がある以上その命題は真とはならない。

* * *

何かが仮定されている命題、いわゆる条件がある命題は、全体としての真偽を瞬時に見極めにくいことがある。たとえば

$$(x-2)(x-5) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2$$

は、一見正しいことを述べているように見えるが、実は偽である。$(x-2)(x-5) = 0$ は $x = 2, 5$ のことなので、それを日本語にした

$$x = 2 \text{ または } x = 5 \text{ ならば、} x = 2 \text{ である}$$

を注意深く読めば、x は 2 か 5 のいずれかであればよいので、「$x = 5$ ならば $x = 2$ である」と読んでも構わないことになる。であれば、元の命題は正しい文ではない。また、

$$x^2 = -9 \quad \Rightarrow \quad x = -3$$

は、平方数が負の値とした仮定自体が間違っているので、命題自体も偽であるように思えるが、実は真である。明らかに直感に反するように思えるが、その理由は次の節で述べよう。▮

命題の逆・裏・対偶

命題 P :「$A \Rightarrow B$」に対して、仮定と結論を入れ替えた命題 P' :「$B \Rightarrow A$」を命題 P の**逆**という。具体例を 2 つあげよう。

P : 正方形は平行四辺形である　の逆は　P': 平行四辺形は正方形である

$Q : x = \pm 3 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 9$　　　の逆は　Q': $x^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 3$

P は真であるが、その逆である P' は偽である。また、Q は真であり、その逆である Q' も真である。この例からも、ある命題が正しくても、逆の命題は必ずしも正しくないことが分かる。日常的には「この店のケーキはおいしい」と「ケーキがおいしいのはこの店」は、だいたい同じ意味で話すかもしれないが、数学の世界は「逆、必ずしも真ならず」なのである。

“逆” と近い言葉に “否定” がある。ただし数学でいう**否定**とは「〜である」を「〜でない」に言い換えたものを指す。具体定期には「$x = \pm 3$」の否定は「$x \neq \pm 3$」となる。そして、命題の仮定・結論ともに否定した文を命題の**裏**という。つまり

P : 正方形は平行四辺形である　の裏は　P'': 正方形でない図形は平行四辺形でない

$Q : x = \pm 3 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 9$　　　の裏は　Q'': $x \neq \pm 3 \quad \Rightarrow \quad x^2 \neq 9$

となる。

この場合は、P'' は偽である。なぜなら、正方形でない図形として長方形を考えれば、それは平行四辺形でもあるからだ。しかし、Q'' は真である。x が ± 3 以外の数ならば、x^2 が 9 になることはないからだ。逆と同じく否定も、元の命題と真偽は一致しない。

さて、次々と用語を定義したのは訳があってのことだ。最後に**対偶**を定義しよう。対偶とは、仮定・結論をともに否定した上で仮定と結論を入れ替えた文のことである。

P : $A \Rightarrow B$ に対して、B でない $\Rightarrow$ A でない を P の**対偶**と呼ぶ

いままでの例を使えば

P : 正方形は平行四辺形である　の対偶は　P^*: 平行四辺形でない図形は正方形でない

$Q : x = \pm 3 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 9$　　　の対偶は　Q^*: $x^2 \neq 9 \quad \Rightarrow \quad x \neq \pm 3$

となる。

この場合は P、Q は真であり、P^* と Q^* も真である。実は、対偶に関しては、

命題 P と対偶 P^* の真偽は一致する

が成り立つのである。したがって、命題 P が偽ならば、対偶 P^* も偽である。このことは次の節で示そう。

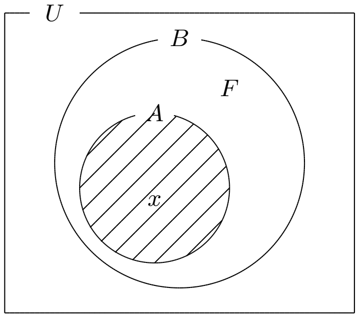
対偶と集合の包含関係

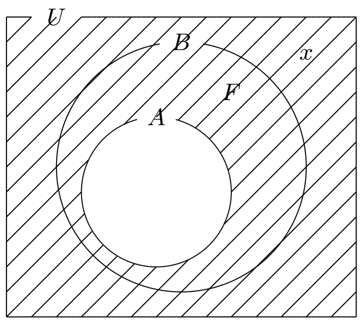
命題の否定と命題の裏の真偽は必ずしも元の命題の真偽と一致しないのに、対偶の真偽が一致するのはなぜだろうか。そのことは集合を考えるとすぐに分かる。

たとえば 2 つの命題

$$\begin{array}{llcl} \text{命題 } P: & x \text{ が自然数である} & \Rightarrow & x \text{ は整数である} \\ \text{命題 } Q: & \text{図形 } F \text{ が四角形} & \Rightarrow & \text{図形 } F \text{ は正方形である} \end{array}$$

を考えてみよう。仮定や結論が正しければ、言及している要素 x はある集合 A に含まれる、すなわち $x \in A$ であり、正しくなければ、$x \notin A$ である。





ここで、A を自然数の集合、B を整数の集合とした場合と、A を正方形の集合、B を四角形の集合とした場合を考えてみよう。いずれの場合でも、集合 A、B の関係は $A \subset B$、つまり、A は B に完全に含まれていることになる。

このとき、命題 P は「$x \in A \Rightarrow x \in B$」と言っている。また、命題 Q は「$F \in B \Rightarrow F \in A$」と言っている。左の図を参考にすれば、命題 P は真、命題 Q は偽であることは明らかであろう。

さて、このような状況において対偶は

$$\begin{array}{llcl} \text{命題 } P^*: & x \text{ が整数でない} & \Rightarrow & x \text{ は自然数でない} \\ \text{命題 } Q^*: & \text{図形 } F \text{ が正方形でない} & \Rightarrow & \text{図形 } F \text{ は四角形でない} \end{array}$$

となる。このとき、命題 P^* は「$x \notin B \Rightarrow x \notin A$」と言っている。また、命題 Q^* は「$F \notin A \Rightarrow F \notin B$」と言っている。

$x \in \overline{B}$ なる要素 x が、$\overline{A}$ に対してどうなっているかはすぐに分かりづらい。しかし、右の図を見れば一目瞭然であろう。命題 P^* において、$x \in \overline{B}$ である x は集合 B の外側にあり、ここは完全に $\overline{A}$ に含まれている。したがって、命題 P^* は真である。

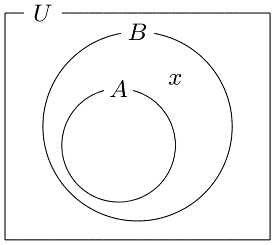
一方、命題 Q^* においては、$F \in \overline{A}$ である F は集合 A の外側ではあるが、必ずしも $\overline{B}$ の外側にあるわけではない。したがって、命題 Q^* は偽である。いずれにせよ、対偶の真偽は一致している。

*　*　*

逆と裏については、必ずしも真であるとは言えないことはすでに述べた。ここでは集合を考えることで、「x が自然数 $\Rightarrow$ x は整数である」の逆

$$x \text{ が整数} \quad \Rightarrow \quad x \text{ は自然数である}$$

の真偽を考えてみよう。A を自然数の集合、B を整数の集合としたとき、「x が整数」であることは「$x \in B$」を意味するので、$x \notin A$ となっている場合もある。



すると、x は A であることから外れているので、x が自然数であると言い切ることができない。

また、「x が自然数 $\Rightarrow$ x は整数である」の裏

$$x \text{ が自然数でない} \quad \Rightarrow \quad x \text{ は整数でない}$$

の真偽を考えたとき、「x が自然数でない」ことは「$x \notin A$」を意味するので、$x \in B$ となっている場合もある。すると、x は $\overline{B}$ から外れているので、x が整数でないと言い切ることができない。

さて、前節で保留した命題

$$x^2 = -9 \quad \Rightarrow \quad x = -3$$

の真偽についてだが、この命題の対偶は

$$x \neq -3 \quad \Rightarrow \quad x^2 \neq -9$$

である。これは「x に -3 以外の値を与えても x^2 が -9 になることはない」と主張していることになるが、そもそも x^2 が負の値になることはないのだから、$x^2 \neq -9$ は正しいことを言っている。したがって、元の命題も真となる。

日常では、間違ったことから始めれば、まず結果も間違ってしまうはずだから、

仮定が偽である命題は、常に真である...（※）

ことは納得がいかないであろうが、それは勘違いである。日常においては、間違ったことから始めた "現実" が間違った結果を招くのである。しかし、（※）は仮定が間違っていると言っているだけで、まだ "実現していない" のである。何しろ "仮定" なのだから。当然、結論も架空の話になる。だとすれば、仮定が間違っていようがいまいが、命題は空想の話である。空想の世界では、何が起こっても正しいのである。

現実には、頭につけた竹とんぼで人が空を飛んだり、開ければ好きな場所へいけるドアがあったりすることはないが、これは、未来から来たネコ型ロボットが存在する世界—つまり仮定が偽である命題—の話なので、すべては正しいのである。∎