集合の基本法則

前回見た集合は、すべて**有限集合**の例であった。しかし有限個のものに殊更（ことさら）集合の概念を持ち出す必要はないだろう。そんなものは見れば分かるからだ。集合の概念は**無限集合**にこそ必要なのである。とは言うものの、無限に要素を持つ集合を扱うことはそれほど簡単なことではない。たとえば実数の集合 R と言った場合、R に $6,\ \dfrac{3}{7},\ -\sqrt{2},\ \pi,\ \ldots$ などが含まれることは分かるとしても、では全体としてどのような集合かと問われると心もとない。そのようなときは要素に注目するのがよいかもしれない。

自然数の集合 N は実数の集合 R の部分集合であるが、これなども「$a \in N$ であるすべての a について、$a \in R$ が成り立っている」と書けば、$N \subset R$ であることがベン図をかかなくとも分かりやすい。そうすると $A \cap B$、$A \cup B$、$\overline{A}$、$A - B$ というのは、それぞれ

$$
\begin{aligned}
A \cap B &= \{x \mid x \in A \text{ かつ } x \in B\} \\
A \cup B &= \{x \mid x \in A \text{ または } x \in B\} \\
\overline{A} &= \{x \mid x \notin A\} \\
A - B &= \{x \mid x \in A \text{ かつ } x \notin B\}
\end{aligned}
$$

と表すことができてよい。このような記述を集合を表す際の基本とすれば、どこか漠然とした集合が演算の性質をもつことになるのである。

集合の演算規則

集合と計算は何となく折り合いが悪そうな気がするかもしれない。ところがそうでもないのである。まず、$x \in A$ であることが正しい—すなわち**真**—のとき 1 をあてがい、$x \in A$ であることが正しくない（つまり $x \notin A$）—すなわち**偽**—のとき 0 をあてがうことにしてみる。そのとき $x \in (A \cap B)$ と $x \in (A \cup B)$ の真偽がどうなるかを示したのが次の表である。

$(x \in A,\ x \in B)$	$(1,\ 1)$	$(1,\ 0)$	$(0,\ 1)$	$(0,\ 0)$
$A \cap B$	1	0	0	0
$A \cup B$	1	1	1	0

たとえば 2 番目の $(1,\ 0)$ の結果は、$x \in A$、$x \notin B$ であるとき、$x \notin (A \cap B)$、$x \in (A \cup B)$ となることを表している。4 種類のパターンを見ると、$(a,\ b)$ に対する $A \cap B$ が $a \times b$ の計算、$(a,\ b)$ に

対する $A\cup B$ がほぼ $a+b$ の計算に対応していることが分かる。“ほぼ” と書いたのは、$1+1=1$ になっているからだ。本来 $1+1=2$ だが、ここでは 1 か 0 しか使えないので 2 はどちらかに対応させなくてはならない。しがってこの場合は、$1+1=1$ ということになる。

このことを利用して、集合においても

交換法則	$A\cap B=B\cap A$、	$A\cup B=B\cup A$
結合法則	$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$、	$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$
分配法則	$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$、	$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

が成り立つことを示してみよう。交換法則と結合法則はほぼ自明であるから、分配法則のひとつ目を示すだけにする。まず、左辺から。以下が $A\cap(B\cup C)$ の真偽表である。

$(x\in A,\ x\in B,\ x\in C)$	$(1,\ 1,\ 1)$	$(1,\ 1,\ 0)$	$(1,\ 0,\ 0)$	$(0,\ 1,\ 1)$	$(0,\ 1,\ 0)$	$(0,\ 0,\ 0)$
A	1	1	1	0	0	0
$B\cup C$	1	0	0	1	0	0
$A\cap(B\cup C)$	1	0	0	0	0	0

たとえば表において、右から 3 列目の $(0,\ 1,\ 1)$ は次の意味である。要素 x が集合 S に含まれていれば 1、含まれていなければ 0 で表すものとし、記述 $(*,\ *,\ *)$ は左から順に、要素 x が集合 A、B、C に含まれているかどうかを示すものとする。したがって、$(0,\ 1,\ 1)$ は要素 x が集合 A に含まれず、集合 B、C には含まれることを意味する。

するとこの場合は、x は $B\cup C$ にも含まれるので 1 で表されるが、x は A には含まれないので $A\cap(B\cup C)$ にも含まれず 0 で表されるのである。次は、右辺の真偽表である。

$(x\in A,\ x\in B,\ x\in C)$	$(1,\ 1,\ 1)$	$(1,\ 1,\ 0)$	$(1,\ 0,\ 0)$	$(0,\ 1,\ 1)$	$(0,\ 1,\ 0)$	$(0,\ 0,\ 0)$
$A\cap B$	1	1	0	0	0	0
$A\cap C$	1	0	0	0	0	0
$(A\cap B)\cup(A\cap C)$	1	0	0	0	0	0

$(A\cap B)\cup(A\cap C)$ についても同じように調べると、2, 3 行目に違いはあるものの 4 行目の結果は全く同じである。以上のことから、$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ であることが確認できるだろう。もちろん、ベン図をかいて確認してもよい。

* * *

いま、$\cap$ が $\times$、$\cup$ がほぼ $+$ に対応していると言った。この関係を用いると、集合の性質を計算式で表せる場合がある。たとえば

$$A\cap(B\cup C)=A\times(B+C)=(A\times B)+(A\times C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

のような具合だ。しかし、すべてが一般の計算式と同じにはならない。実際、$A\cup(B\cap C)=A+(B\times C)$ に分配法則は適用できない。なぜなら演算 $\times$ は $+$ に優先するので、$B\times C$ を分割することはできないからだ。

しかしながら、ここで用いた $\times$, $+$ は $\cap$, $\cup$ の意味だから、一般の計算における優先順位というものはないのである。したがって、集合における $+$ も $\times$ と同様、分配の計算に使えると考えてよい。すなわち

$$A \cup (B \cap C) = A + (B \times C) = (A + B) \times (A + C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

である。

ここで注意を一つ。$\cap$, $\cup$ に優先順位がないので、式は原則、左から評価される。そのため、$(A \cup B) \cap (A \cup C)$ を $A \cup B \cap A \cup C$ と書いた場合、$A \cup B \cap A$ までの評価でこれは A に等しいので、$A \cup B \cap A \cup C \to A \cup C$ となって正しくない。そのため、不要と思える ( ) を使っているのだが、$\cap$, $\cup$ を $\times$, $+$ と見るなら、括弧の使い方に気を使わなくてはならない。▮

ド・モルガンの法則

集合の共通部分や和集合を考えるとき、次の**ド・モルガン**[1]**の法則**は便利に使える。

$$\begin{aligned} \overline{A \cap B} &= \overline{A} \cup \overline{B} \\ \overline{A \cup B} &= \overline{A} \cap \overline{B} \end{aligned}$$

これが成り立つことはベン図をかけばすぐ分かるし、また、さっきのように 1 と 0 を用いてもよい。1 と 0 を使うと、いくつかの場合を考えねばならず面倒だと思うなら Microsoft Excel のお世話になるのも悪くない。

◇	A	B	C	D	E	F	G
1	A	B	not(A ∩ B)	not(A ∪ B)	(notA) ∩ (notB)	(notA) ∪ (notB)	
2	1	1	(* C2)	(* D2)	(* E2)	(* F2)	
3	1	0	↓下へコピーする	↓下へコピーする	↓下へコピーする	↓下へコピーする	
4	0	1	↓	↓	↓	↓	
5	0	0	↓	↓	↓	↓	
6							

※ セルの式
(C2) =NOT(AND(A2,B2))
(D2) =NOT(OR(A2,B2))
(E2) =AND(NOT(A2),NOT(B2))
(F2) =OR(NOT(A2),NOT(B2))

たとえば、こんな具合だ。Excel においては $\cap$ は AND 関数、$\cup$ は OR 関数が定義されているが、使い方は微妙で $A \cap B$ を求めたければ "=AND(A, B)" のように書かなくてはならない。この入力例では、A, B の真偽がどうでも C 列と F 列が同じ結果を返し、D 列と E 列も同じ結果を返すだろう。なお D2 セルと F2 セルは "OR 式" となっているが、実際には左のセルの AND を OR に変えた式が入力されている。

Excel の助けを借りれば、集合の組合せが少々複雑になっても関係式が正しいことを確認するのは楽だろう。いろいろ試してみるとよい。

[1]オーガスタス・ド・モルガン（1806–1871）: インド生まれのイギリスの数学者。

* * *

ド・モルガンの法則だけ見ると、何がそんなに重要な法則かと思うかもしれない。$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ が意味するところは、「A と B の共通部分の補集合」と「A の補集合と B の補集合の和集合」が等しいということである。等式に目を凝らすと $\overline{\cap} \to \cup$ に気づく。つまり、$\overline{A \cap B}$ をひとつひとつ分解して $\overline{A} \cup \overline{B}$ になったと見てもよい。

しかし、これはあくまでも便宜的な見方である。$\overline{A}$ は明確に A のであるが、$\overline{\cap}$ は $\cap$ の補集合ではない。そもそも $\cap$ は共通部分を意味する記号であって集合ではないからだ。▮

集合の個数と濃度

少し抽象的になってきたようなので、具体的な話に戻すことにしよう。集合の要素を書き下せば具体的ではあるが、そこまで具体的な値を必要としないことも多い。日常的にも、たとえばレストランが予約を受けるときは、人数を知る必要はあっても、一人ひとりがどのような人かはあまり重要ではない（ことが多い）。集合を扱う場合も、そのようなことはよくある。2 桁の自然数の集合といった場合、具体的には $\{10,\ 11,\ 12,\ \ldots,\ 99\}$ であるが、要素の数は 90 である。

集合の要素の個数を表すとき、$A = \{10,\ 11,\ 12,\ \ldots,\ 99\}$ の場合、$n(A) = 90$ のような書き方をする。集合 A の要素数（number）は 90 である、という意味である。ただ、集合の要素を数える行為は、日常において数を数える行為とは若干違っている。

たとえば、$A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$、$B = \{3,\ 6,\ 9\}$ であれば、$n(A) = 4$、$n(B) = 3$ であり $n(A)+n(B) = 7$ は正しい。しかし、$n(A)+n(B)$ は「集合 A の個数と集合 B の個数を合わせる」ことであり「集合 A と集合 B を合わせた個数」ではない。集合 A と集合 B を合わせると $\mathrm{A} \cup B = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 9\}$ であるから、$n(A \cup B) = 6$ となる。それは、A、B に共通の要素—すなわち $A \cap B = \{3\}$ —が 1 個含まれるために、必ず $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ になるとは限らないからである。正しくは

$$\boxed{n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)}$$

である。このことは直観的に分かりやすい。

しかし、無限集合については話が異なる。正の奇数の集合 $O = \{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \ldots\}$ と正の偶数の集合 $E = \{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ \ldots\}$ を考えよう。$O \cap E$ は空集合であるから、$n(O \cap E) = 0$ である。O と E を合わせて自然数の集合[2] N になるから、$n(N) = n(O) + n(E) - n(O \cap E) = n(O) + n(E)$ になりそうである。

[2] 自然数の定義は、0 を含める流儀と 0 を含めず 1 から始める流儀があるようだが、ここでは自然数は 1 から始まるとしている。

ところが、無限集合の要素を数える場合は簡単な話で済まない。そもそも、無限の個数を数えきることができるのだろうか。ここは、“数える” ことの意味を根本から見直す必要があるだろう。

日常の感覚では、奇数と偶数を

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & \dots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \dots \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & \dots \end{array}$$

のように対応させれば、奇数と偶数は同じ数だけありそうに見える。では、奇数と偶数を合わせた自然数は、その 2 倍の数になるかというとそうでもない。自然数はたとえば偶数と

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \dots \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & \dots \end{array}$$

のように対応させることができるからである。これだと、自然数と偶数は同じ数だけあるように見える。

無限集合は数える行為に合わない。そこでカントール[3]は、**濃度**という概念を導入し、無限集合を数えることにしたのである。カントールによれば自然数の濃度は $\aleph_0$ である[4]。奇数・偶数も自然数と 1 対 1 に対応するので、同じ濃度 $\aleph_0$ を持つ。

すると、たとえば 0.1 の倍数の集合は

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & 10 & \dots & 123 & \dots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \dots & \updownarrow & \dots & \updownarrow & \dots \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0.5 & \dots & 1 & \dots & 12.3 & \dots \end{array}$$

のように、自然数とと 1 対 1 に対応するので濃度は $\aleph_0$ である。このように考えると、どんな無限集合でも濃度は $\aleph_0$ であるように思えてしまう。

ところがカントールは、有理数の集合の濃度は $\aleph_0$ であるが実数の集合はそうではないことを示し、実数の集合の濃度を $\aleph$ とした。ここでは詳しく述べないので、関心があれば調べるとよい。証明は簡単に理解できるものと思う。無限集合に不等号をあてがうのは気が引けるが、$\aleph_0 < \aleph$ が分かる。

すると、$\aleph <?$ なる集合は何だろう、との疑問が浮かぶかもしれないが、あまり深入りすることはできない。それは**連続体仮説**と呼ばれている。もちろん、ここで扱うには敷居が高い。

[3] ゲオルク・カントール（1888–1888）: ドイツの数学者。

[4] $\aleph$ はヘブライ文字の最初の文字で “アレフ” と読む。