集合

集合とはものの集まりである。では「もの」とは何であろうか。数学では、現実に存在しているいないに関わらず、思考の対象になるものなら何でもよい。しかし、ある「もの」は他の「もの」と明確に区別ができなくてはならない。たとえば、日常的には芸能人の集まりで通じても、どこまでが芸能人か明確にしない限り、数学では集合と呼ばないのである。

集合を構成している 1 つ 1 つのものを、**集合の要素**という。習慣として、集合は大文字 A、B、C、... で表し、集合の要素は小文字 a、b、c、... で表しているので、たとえば要素 a が集合 A に含まれている場合は $a \in A$ または $A \ni a$ と表し、要素 b が集合 B に含まれていない場合は $b \notin B$ または $B \not\ni b$ と表す。記号 “$\in$” はとくに決まった呼び方はないようで、“含む”、“含まれる”、“属する” などと読めばよいだろう。

集合 A が 10 の正の約数の集合であるとき、具体的に要素を書き並べて書けば

$$A = \{1,\ 2,\ 5,\ 10\}$$

であり、条件を指定して書けば

$$A = \{x \mid x \text{ は 10 の正の約数 }\}$$

のようになる。条件を指定して書く記述の仕方は慣れないと分かりにくいが、たとえば

$$N = \{2n - 1 \mid 1 \leqq n \leqq 50\text{、}n \text{ は自然数 }\}$$

のように書くことで、$N = \{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 99\}$ と書くより正確に内容を伝えることができる。また、具体的に要素を書き並べる表し方を**外延的表示**、条件を指定して書く表し方を**内包的表示**と言うこともある。

共通部分と和集合

複数の集合 A、B、... があった場合、ある要素 x が A にも B にも含まれていることがある。たとえば $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$、$B = \{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11\}$ のとき、$\{2,\ 3,\ 5\}$ は A、B に共通の集合になっている。このとき、集合 $\{2,\ 3,\ 5\}$ を A、B の**共通部分**といい

$$A \cap B = \{2,\ 3,\ 5\}$$

と表す。記号 “∩” は、“キャップ（cap）” と読む。また、A と B を合わせた集合を考えることがあり、それを A、B の**和集合**といい

$$A \cup B = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 7,\ 11\}$$

と表す。記号 “∪” は、“カップ（cup）” と読む。集合を合わせるといっても 2, 3, 5 が 2 個ずつ含まれるわけではない。集合は、区別できる要素がどれだけあるかを示しているのであって、延べ数を数えるものではないからである。

しかしながら、偶数の集合 E と奇数の集合 O には共通の要素がない。日常的な感覚では共通部分はないのであるが、このようなときも共通部分を集合としてとらえ、それを**空集合（くうしゅうごう）**と呼ぶことにする。空集合にはとくに記号 “∅” を用いる[1]。記号は 0（零）に /（斜線）を重ねたものである。したがって

$$E \cap O = \emptyset$$

と書く。空集合を $\{\emptyset\}$ と書いてはいけない。$\emptyset$ は要素を持たない集合のことであり、$\{\emptyset\}$ は $\emptyset$ を要素に持つ集合のことで、意味することがまったく異なる。空集合をどうしても “{” と “}” を用いて表したければ $\{\ \ \}$ と書くしかないだろう。

*　*　*

集合はその特徴において、それぞれ何々集合と呼ばれているのだが、不思議なことに共通部分だけは共通集合と言わなかったことに気づいただろうか。実は共通部分は、共通集合ではなく**積集合**と呼ぶこともある。それは和集合の対比というより、集合の性質から名付けられたものであろう。内包的表示を用いて表すと、和集合と積集合はそれぞれ

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ または } x \in B\}、\quad A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ かつ } x \in B\}$$

と表される。このとき要素の選び方を演算と見れば、“または” にあたる演算は和に相当し、“かつ” にあたる演算は積に相当しているのである。

このように演算との対応がはっきりしているにもかかわらず、積集合より共通部分の言葉が使われる理由は、おそらく集合の要素を数えるとき、**直積**と呼ぶ積の法則があるためと思われる。直積は要素を数えるだけでなく集合を規定する場合もあるので、混同を避ける必要があったのかもしれない。▌

部分集合と補集合

$A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ について、A の要素からいくつか取り出して新しい集合を作ることができる。たとえば 1, 3, 4 を取り出して $C = \{1,\ 3,\ 4\}$ とすれば、C は A の**部分集合**となる。このこと

[1] ギリシャ文字 “ϕ” で代用することも多い。

を $C \subset A$ または $A \supset C$ と書く。かりに A の要素を全部取り出して $C = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ としても C は A の部分集合と呼び、やはり $C \subset A$ と表す。しかしこの場合は、C の要素をすべて取り出して $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ を作ったという見方をしても何ら矛盾は起こらないので、$A \subset C$ と書いてもよい。

いや、その見方は日常の考えと少し違うのではないか、普通は $A = C$ と書くべきだろうと思ったかもしれない。実際その通りで、A と C はまったく同じ要素で構成されているので、このとき A と C は等しい集合といい $A = C$ と表すのである。このことから集合については次のことが言える。

$$\boxed{X \subset Y \text{ かつ } Y \subset X \text{ のとき、} X = Y \text{ である}}$$

また、A から要素を取り出したとき、何も取り出さないということが起こるかもしれない。それは要素がない集合、すなわち空集合である。A から取り出した集合が結果的に空集合となったのだから、空集合は A の部分集合と考えることは自然なことだろう。そこで、空集合はあらゆる集合の部分集合と定義しておきたい。

さて、これまで具体的に集合 A や集合 B を考えてみたが、実は集合の要素は 12 未満の正の整数から選んでいたとしよう。このとき、12 未満の正の整数の集合は**全体集合**となっている。全体集合を U とすると、いま見てきた集合は $A \subset U$、$B \subset U$ などとなっている。一般には、集合を考えるときは全体集合を暗黙のうちであっても決めていることが多い。たとえば、整数の集合とか平面図形の集合が暗黙の全体集合であったりする。

ところで、集合 A を全体集合の中の部分集合と考えたとき、必然的に A に含まれなかった要素の集合がある。それは ***A* の補集合**といい $\overline{A}$ で表す。したがって、12 未満の正の整数を全体集合としたとき、$A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ ならば

$$\overline{A} = \{6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11\}$$

である。

*　　*　　*

先の例で $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$、$C = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ のとき、$A \subset C$ であることに納得がいかない人もいるのではないだろうか。不等式においては、$a < c$、$c < a$ という関係があったとき、そのような a、c は存在しないのだから、納得いかないことは自然な感覚に違いない。実際、不等式では $a \leqq c$、$c \leqq a$ であれば $a = c$ が成り立つので、集合においても $A \subseteq C$ という書き方をする場合もある。これなら $A \subseteq C$、$C \subseteq A$ のとき $A = C$ というのは納得できるだろう。

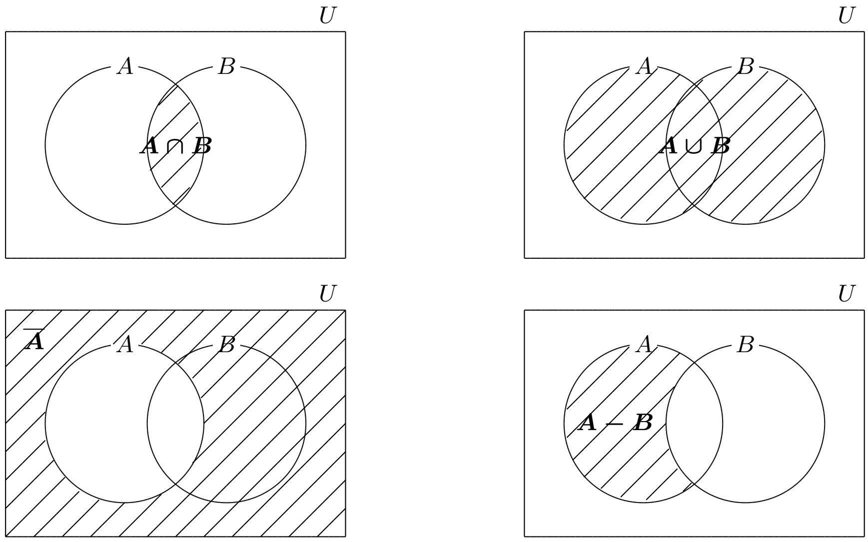
そこで、集合が単なる数値と違う例として次のような状況を考えてみよう。いま A、B の 2 人が手にいくつかの硬貨を相手に見えないように持っていて、互いに相手の手の中を知りたいとする。まず A が B に対し

て、自分の手の中にある硬貨を見ながら「1 円玉はありますか」「5 円玉はありますか」「10 円玉はありますか」と聞いたとき、返答がすべて「はい、あります」というのであれば、A は、少なくとも B が持っている硬貨が自分と同じかそれより多いことは分かる。つまり $A \subset B$ であることは分かる。

一方で B も同様に、自分の手の中にある硬貨を見ながら「1 円玉はありますか」「5 円玉はありますか」「10 円玉はありますか」と聞いたとき、返答がすべて「はい、あります」となれば $B \subset A$ であることが分かる。しかし、このような状況が起きるときは A と B の手持ちの硬貨がまったく同じであるときである。したがって $A \subset B$ かつ $B \subset A$ のときに $A = B$ であるというのは、まったく自然なことなのである。▮

ベン図

集合について少しばかりの例を見てきたが、記号と数値の羅列では様子がいまひとつ分かりづらい。そこで**ベン図**と呼ばれる、円を集合に見立てた図を書くと便利である。これまでの集合の関係をベン図で表すと



のようになる。4 番目の図は、集合 A から B の要素を除いた集合で、A から B を引いた**差**といい $A - B$ で表す。これは $\overline{B}$ とは違うことに注意されたい。

べき集合

集合はとくに全体集合を持ち出さなくとも、A という集合の部分集合を考えれば自然と A が全体を表すようになるだろう。A の部分集合はいくつも作れるのだが、A のすべての部分集合の集合を**べき集合**と呼び 2^A で表す。

まず「集合の集合」という考え方であるが、要するに集合の要素が集合なのである。具体的に $A = \{1,\ 2,\ 3\}$ とすれば、A の部分集合は

$$\emptyset,\ \{1\},\ \{2\},\ \{3\},\ \{1,\ 2\},\ \{1,\ 3\},\ \{2,\ 3\},\ \{1,\ 2,\ 3\}$$

であるから、A のべき集合 2^A は

$$2^A = \{\ \emptyset,\ \{1\},\ \{2\},\ \{3\},\ \{1,\ 2\},\ \{1,\ 3\},\ \{2,\ 3\},\ A\ \}$$

ということになる。べき集合 2^A には A のすべての部分集合が含まれるので、A のあらゆる場合を網羅している集合となっていて、単に集合 A を考える以上に A を特徴づけているのである。

それにしては 2^A という表し方が気になるかもしれない。しかし、この表記の仕方には確固たる根拠がある。なぜなら A の要素は 3 個であるから、$2^3 = 8$ という値がちょうど 2^A の要素の個数に対応しているのである。そうなる理由は部分集合の作り方を考えればよい。たとえば要素 $\{1\}$ は、A から 1 を選び、2, 3 を選ばないことで作られる。また要素 $\{1,\ 2,\ 3\}$ は、A から 1, 2, 3 を選ぶことで作られる。つまり、A の各要素は常に「選ぶ」か「選ばない」の 2 通りの選択肢を持っていることになる。したがって、2 通りの選択肢を持つものが 3 個あれば、可能な選択肢の組合せは $2 \times 2 \times 2 = 2^3$ になる。このことが、X のべき集合を 2^X で表す理由である。