約数の個数

前節で Microsoft Excel を利用して約数を調べたのだが、約数の個数を数える方法は洗練されたものではなかった。もし約数の個数だけを知りたければ、数学的にうまい方法がある。それは最大公約数・最小公倍数を調べた方法にヒントがある。たとえば $36 = 2^2 \cdot 3^2$、$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ である。36 と 60 の最大公約数や最小公倍数を求めるには、2 や 3 や 5 の個数を数えればよかったはずだ。

60 の約数の個数も考え方は同じである。60 の正の約数は 2, 3, 5 をいくつ使うかで決まる。そして、2 は最大 2 個、3 と 5 は最大 1 個まで使うことができる。使わない選択肢 1 通りを含めて、2 は使い方が 3 通り、3 と 5 は使い方が 2 通りとなる。これらの組み合わせで異なる約数を作ることができるので、60 の正の約数は $3 \times 2 \times 2 = 12$（通り）、すなわち 12 個であることが計算で求められるのだ。

しかし、36 の約数を前節のように Excel で調べると、$(1,\ 36), (2,\ 18), \ldots, (6,\ 6)$ と 2 個ずつの組で計 10 個表示されるのだが、実際の約数の個数は 9 個である。これは $36 = 6^2$ であるため、6 の相方として 6 を求めているからである。Excel で用いた方法では、n^2 の形をした整数は $(n,\ n)$ を 2 個の約数と数えてしまう。その点、$36 = 2^2 \cdot 3^2$ と見れば、先の理屈から約数の個数は $(2+1) \times (2+1) = 9$（個）であることが分かる。一般に、

$$\boxed{n = p^a \cdot q^b \cdot r^c \cdots \cdot \ (p,\ q,\ r,\ \ldots \text{ は素数}) \text{ の約数の個数は } (a+1)(b+1)(c+1)\cdots \text{（個）}}$$

である。

倍数の見分け方

100 は 2 の倍数でもあり 5 の倍数でもあり 25 の倍数でもある。ある整数が何の倍数であるかは、

2 の倍数	一の位が偶数
3 の倍数	各桁の数字の和が 3 の倍数
4 の倍数	下 2 桁が 4 の倍数
5 の倍数	一の位が 0 か 5
6 の倍数	一の位が偶数、かつ、各桁の和が 3 の倍数
8 の倍数	下 3 桁が 8 の倍数
9 の倍数	各桁の数字の和が 9 の倍数
10 の倍数	一の位が 0
11 の倍数	（奇数桁の数字の和）−（偶数桁の数字の和）が 11 の倍数

のような調べ方で分かる。2 の倍数や 5 の倍数の見分け方は説明するまでもないだろう。3 の倍数の見分け方は、もちろん数学的な裏付けがある。たとえば 670758 は、$6+7+0+7+5+8 = 33 = \underline{3}\times 11$ だから 3 の倍数である。どんな桁の数でも成り立つことだが、ここでは 3 桁の整数 $n = 100a+10b+c$ を例に証明してみよう。証明といっても

$$n = 100a + 10b + c = (99a + 9b) + (a + b + c)$$

であることが分かれば十分である。$(99a + 9b)$ は 3 の倍数であるから、n が 3 の倍数であるためには $(a + b + c)$ が 3 の倍数でなければならない。そのため、各桁の数字の和 $(a + b + c)$ が 3 の倍数かどうかを調べればよいのである。9 の倍数の見分け方も同じ理屈だ。

4 の倍数の見分け方は、$n = 100a + m$ のように、整数を 100 以上の桁と下 2 桁に分けて見ればよい。100 以上の桁 $100a$ は必ず 4 で割り切れるので、下 2 桁 m が 4 の倍数かどうかが判断材料となる。670758 は下 2 桁の 58 が 4 の倍数でないから、4 の倍数ではない。実際、$670758\div 4 = 167689.5$ となって整数値にならない。8 の倍数の見分け方も同様で、1000 以上の桁は必ず 8 で割り切れるからである。

11 の倍数の見分け方は少し変わっている。670758 の奇数桁の数字の和は $7 + 7 + 8 = 22$、偶数桁の数字の和は $6 + 0 + 5 = 11$ で、その差 11 は 11 の倍数である。実際、$670758 \div 11 = 60978$ となって整数値となる。ちなみに、差が 0 になっても 11 の倍数である。0 はすべての整数の倍数だからだ。

なぜ、この方法で 11 の倍数を見分けられるのだろう。$n = 1000a + 100b + 10c + d$ とおいて仕組みを調べよう。このとき

$$n = 1000a + 100b + 10c + d = (1001a + 99b + 11c) + (-a + b - c + d)$$

と変形するのがよい。奇数桁である d、$100b$、$10000y$、$\ldots$ は d、$(99b + b)$、$(9999y + y)$、$\ldots$、偶数桁である $10c$、$1000a$、$100000x$、$\ldots$ は $(11c - c)$、$(1001a - a)$、$(100001x - x)$、$\ldots$ と見ると、一般に

$$\begin{aligned} N &= \cdots + 100000x + 10000y + 1000a + 100b + 10c + d \\ &= (\cdots + 100001x + 9999y + 1001a + 99b + 11c) + (\cdots - x + y - a + b - c + d) \end{aligned}$$

のような式にできるのである。

奇数桁由来の $99b$ や $9999y$ が 11 の倍数であることはすぐ分かるだろう。$99\cdots 99$ を 2 桁ずつ区切って見れば明らかに 11 で割り切れる。偶数桁由来の $11c$、$1001a$、$100001x$、つまり 1 と 1 の間に

0 が偶数個挟まれた数は必ず 11 の倍数になる。なぜなら、$1001 = 990 + 11$、$100001 = 99990 + 11$ であるから、奇数桁由来の理屈と同じく $99 \cdots 990$ は必ず 11 の倍数となる。結局、11 の倍数の判定は $(\cdots - x + y - a + b - c + d)$ にかかってくるのだが、これを奇数桁の数字の和と偶数桁の数字の和の引き算と見直したのである。

ところで、7 の倍数の見分け方が抜けていることに気づいているだろう。実は、7 の倍数を見分ける方法はある。11 の倍数の考え方に似ているところがあって、$1001 = 7 \times 143$ であることを利用する。たとえば大きな桁の数 N があった場合、まず N を一の位から 3 桁ずつ区切ってみる。つまり $N := d_2d_1\ c_3c_2c_1\ b_3b_2b_1\ a_3a_2a_1$ のような具合だ。これは、$a_1, a_2, \ldots$ 等の数字の並びとして見てほしい。少し見づらいので、この場合は $N = 10^9D + 10^6C + 10^3B + A$ と見ておこう。ただし今度は、$A, B, C, \ldots$ が 3 桁の数値であることに注意しよう。つまり、1000 未満の値として見るのである。ここで、$(10^3 + 1)^k$ の展開式より

$$
\begin{aligned}
(10^3+1)^3 &= 10^9 + 3\cdot 10^6 + 3\cdot 10^3 + 1 &\Rightarrow\quad 10^9 &= \underbrace{(10^3+1)^3 - 3\cdot 10^3(10^3+1)}_{=N_3} - 1\\
(10^3+1)^2 &= 10^6 + 2\cdot 10^3 + 1 &\Rightarrow\quad 10^6 &= \underbrace{(10^3+1)^2 - 2(10^3+1)}_{=N_2} + 1\\
(10^3+1) &= 10^3 + 1 &\Rightarrow\quad 10^3 &= \underbrace{(10^3+1)}_{=N_1} - 1
\end{aligned}
$$

と見直すことで、

$$
\begin{aligned}
N &= (N_3 - 1)D + (N_2 + 1)C + (N_1 - 1)B + A\\
&= (N_3 \cdot D + N_2 \cdot C + N_1 \cdot B) + (-D + C - B + A)
\end{aligned}
$$

であるが、N_3, N_2, N_1 はすべて $10^3 + 1$、『すなわち 1001 の倍数であるから、7 で割り切れる』。したがって、N が 7 の倍数かどうかは $-D + C - B + A$ が 7 の倍数かどうかに依るのである。

いまの例は、a_1 から d_2 までの 11 個の数字を用いた 11 桁の数で検証しただけだが、一般に何桁の数であっても 3 桁ずつ区切れば同じ性質を導ける。よって 7 の倍数の見分け方は、3 桁ずつ区切った 1000 未満の数値について、$A, C, \ldots$ を奇数ブロック、$B, D, \ldots$ を偶数ブロックと見て、

（奇数ブロックの 3 桁値の和）−（偶数ブロックの 3 桁値の和）が 7 の倍数

というものである。しかし、このような計算とそのまま 7 で割ることを比較すると、どちらの計算が有利か一概に言えないであろう。

ちなみに $1001 = 7 \times 11 \times 13$ だから、先の『すなわち 1001 の倍数であるから、7 で割り切れる』

と書いたところは、『すなわち 1001 の倍数であるから、11、13 で割り切れる』と書くこともできる。つまり、この方法は 11 や 13 の倍数の見分け方でもあるのだ。

前に調べた 670758 は、この見分け方でも

$$670758 \quad \to \quad -670+758 \quad \to \quad 88 = \underline{11} \times 8$$

となって、11 の倍数であることが分かる。また、3670758 であれば、

$$3670758 \quad \to \quad 3-670+758 \quad \to \quad 91 = \underline{7} \times 13 = \underline{13} \times 7$$

となって、3670758 が 7 かつ 13 の倍数であることが分かる。たしかに、$3670785 \div 7 = 524394$、$3670785 \div 13 = 282366$ と割り切れる。

等式を満たす自然数の組

約数・倍数に絡（から）めて、方程式を考えてみよう。たとえば、ありがちな連立方程式

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 4x-3y & = & 7 \\ 6x+9y & = & -1 \end{array} \right.$$

の解は、一意に求めることができて $(x,\ y) = \left(\dfrac{10}{9},\ -\dfrac{23}{27}\right)$ である。片方の式 $4x-3y=7$ だけでは、$(x,\ y)$ は一意に決まらず、無数の解が存在する。$(x,\ y)$ を整数に限っても同じことだ。

しかし、整数解に限れば $4x-3y=7$ の解が

$$(x,\ y) = \ldots,\ (-2,\ -5),\ (1,\ -1),\ (4,\ 3),\ (7,\ 7),\ (10,\ 11),\ \ldots$$

のように無数に出ても、どこか整然とした感じを受けないだろうか。はっきり言えば、x の解は 3 違いで現れ、y の解は 4 違いで現れている。一次関数の知識があれば、$4x-3y=7$ が直線の方程式を表し、そのため、式を書き直した $y = \dfrac{4x-7}{3}$ が整数座標を持つためには、$4x-7$ が 3 の倍数でなくてはならないことが分かる。だから、x の値は 3 飛びなのだ。y の整数解が 4 飛びなのは、もちろん $x = \dfrac{3y+7}{4}$ だからである。

では、一次関数の知識を用いないで整数解を求めるにはどうすればよいだろう。たとえば $(1,\ -1)$ は $4x-3y=7$ の解であるから、$4 \cdot 1 - 3 \cdot (-1) = 7$ を満たす。これを等式 $4x-3y=7$ から辺々引いてみる。

$$\begin{array}{rrrcl} & 4x & -3y & = & 7 \\ -) & 4 \cdot 1 & -3 \cdot (-1) & = & 7 \\ \hline & 4(x-1) & -3(y+1) & = & 0 \end{array}$$

その結果 $4(x-1)=3(y+1)$ が得られるが、左辺は 4 の倍数であるから右辺も 4 の倍数である。しかし右辺は $3(y+1)$ なので、$(y+1)$ が 4 の倍数に違いない。そこで $y+1=4n$ と置こう。同様に右辺は 3 の倍数であるから左辺も 3 の倍数であり、結局 $(x-1)$ が 3 の倍数である。よって、$x-1=3n$ と置ける。ここで同じ文字 n を用いたのは、

$$4(x-1)=3(y+1) \quad \Rightarrow \quad 4\cdot 3n=3\cdot 4n$$

となるから当然のことであり、もし $3m$ のように異なる文字で表してしまうと、必ずしも等式が成り立つわけでなないからだ。

さて、$x-1=3n$、$y+1=4n$ と置いたので、$4x-3y=7$ の解は

$$x=3n+1, \quad y=4n-1 \quad (n\text{ は整数})$$

と求められた。このような解は**一般解**と呼ばれる。$n=0$ のときが $(x,\ y)=(1,\ -1)$ にあたる。これは一般解から得られる 1 つの解であるため、**特殊解**と呼ばれる。

互いに素

$4x-3y=7$ の一般解を求める例を示したので、同じように $6x+9y=-1$ の一般解を求めてみよう。手順として $6x+9y=-1$ を満たす特殊解を探すのだが、どうにも見つからないはずである。なぜなら、$6x+9y=-1$ を満たす整数解は存在しないからである。そのことは一次関数の知識から分かる。$y=-\dfrac{2}{3}x-\dfrac{1}{9}$ は、y 切片が $-\dfrac{1}{9}$、傾きが $-\dfrac{2}{3}$ である直線なのだが、これが**格子点**（x 座標、y 座標共に整数である点）を通らないことはすぐに分かる。だから、整数解はない。

では、$4x-3y=7$ との違いはどこにあるのか。それは、$6x+9y=-1$ が $3(2x+3y)=-1$ だからである。見ての通り、左辺が 3 の倍数であるのに右辺は 3 の倍数ではない。このことが等式を満たす整数解が存在しない理由なのだ。ただし、存在しないのは整数解であって実数解ではないことに注意されたい。実際、$(x,\ y)=\left(0,\ -\dfrac{1}{9}\right)$ をはじめとして、実数解は無数に存在する。

一方、$4x-3y=7$ の左辺は、とくに何の倍数とは言えない。強いて言うなら、$1\cdot(4x-3y)=1\cdot 7$ であるから、両辺共 1 の倍数である。このことは、$ax+by=m$ の $(a,\ b)$ が公約数を持たないことを意味する。共通の約数を持たない $(a,\ b)$ の組は**互いに素**といい、大変重要な性質である。前に用いた記号を使えば、$\gcd(a,\ b)=1$ と書けるだろう。

ところで、「$ax+by=m$ が整数解を持つ条件は $(a,\ b)$ が互いに素である」ことは、**十分条件**であるが**必要条件**ではない。なぜなら、$6x+9y=15$ は $(6,\ 9)$ は互いに素ではない—すなわち

$\gcd(6,\ 9) = 3$ である—が、整数解 $(1,\ 1)$ を持つ。このようなことが起こるのは、$6x + 9y = 15$ は $2x + 3y = 5$ と**同値**であり、$(2,\ 3)$ が互いに素—すなわち $\gcd(2,\ 3) = 1$—だからだ。

もっとも、整数解を求めるためには十分条件が整っていれば十分である。