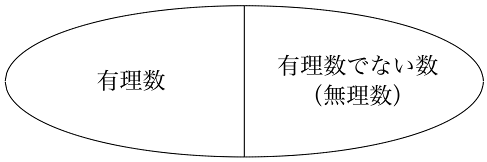
実数

以前、有理数と呼ばれる数を定義したことを覚えているだろう。有理数とは

$$\boxed{\text{整数 } m, n \text{ を用いて } \frac{m}{n} \text{（ただし } n \neq 0\text{）の形で表すことができる数}}$$

のことである。すると、$\dfrac{m}{n}$ の形で表すことが**できない**数を考えることができる。それを**無理数**と呼ぼう。そのような数のひとつが $\sqrt{2}$ のような平方根であった。



いま、有理数と有理数でない数の 2 通りの数を考えたのだが、この 2 通りの数を合わせたものがすべての数—**実数**—の集合である。なぜすべての数の集合かというと、一方は「何々である数」でもう一方は「何々でない数」だから、互いに**補集合**の関係にあるからだ。しかし「何々でない数」というだけでは具体的なことは何も言っていない。

具体例を挙げれば、$\sqrt{2}$ が有理数でないことは以前証明しているから、有理数でないという理由で $\sqrt{2}$ は無理数であるといえる。しかし、このことはもう少し積極的に、$\sqrt{a}$ のうち a が平方数でないものは無理数である、といった方がよいであろう。このことから、2 は平方数でないから $\sqrt{2}$ は無理数であることが分かる。平方数はふつう (整数)^2 のことを指すが、平方された数ならば整数でなくても $\sqrt{\dfrac{9}{4}} = \dfrac{3}{2}$ ということは起こるので、一般に

$$\boxed{a \neq q^2 \text{（} q \text{ は有理数）のとき、} \sqrt{a} \text{ は無理数である}}$$

といった方がよいだろう。要するに $\sqrt{a}$ と書いたとき、a が有理数の平方でない限り $\sqrt{a}$ は無理数である。

平方根の延長に**立方根**がある。2 乗して a になる数を a の平方根と呼び $\sqrt{a}$ で表すように、3 乗して a になる数を a の立方根または 3 乗根と呼び $\sqrt[3]{a}$ で表す。たとえば $\sqrt[3]{2}$ はおよそ 1.25992105 で、3 乗すると 2 になる無理数である。一般に

$$\boxed{\begin{array}{l} n \text{ 乗して } a \text{ になる数を } a \text{ の } n \text{ 乗根と呼び、} \sqrt[n]{a} \text{ と表す} \\ a \neq q^n \,(q \text{ は有理数）のとき、} \sqrt[n]{a} \text{ は無理数である} \end{array}}$$

といえる。この定義から平方根 $\sqrt{a}$ は $\sqrt[2]{a}$ の ^{2} を省略して書いていたのだということが分かる。

*　*　*

n 乗根の定義をさらりと書いてみたが、この定義の仕方は少々心もとない。たとえば $2^4 = (-2)^4 = 16$ であるから、定義をそのまま受け入れると $\sqrt[4]{16}$ は 2 でも -2 でもよいことになってしまう。それでは定義として不完全であるので、正確には

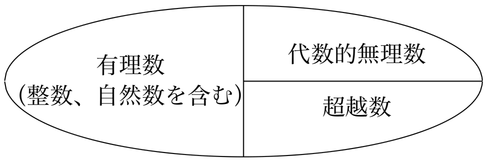
> n 乗して a になる数を a の n 乗根と呼び、
> n が偶数のとき　$a > 0$ ならば
> 　正の n 乗根を $\sqrt[n]{a}$、負の n 乗根を $-\sqrt[n]{a}$ と表す
> 　$a < 0$ ならば
> 　定義しない
> n が奇数のとき　$\sqrt[n]{a}$ と表す
> とくに　0 の n 乗根は 0 と定める

とするべきであった。しかしこの段階では、記述の仕方を決める程度で十分なのである。▮

n 乗根は方程式の解でもある。簡単な例では、$x^n = a$ に解があればそのひとつが $x = \sqrt[n]{a}$ である。一般に代数方程式

$$a_0x^k + a_1x^{k-1} + a_2x^{k-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

から解が得られたとき、それが有理数でなければ解は**代数的無理数**と呼ばれる。そのように呼ぶのは、代数的方程式の解にならない無理数—**超越数**という—があるからだ。ここでもまた、一方が「何々である無理数」でもう一方は「何々でない無理数」に分かれていることに注意してもらいたい。すなわち実数の集合は



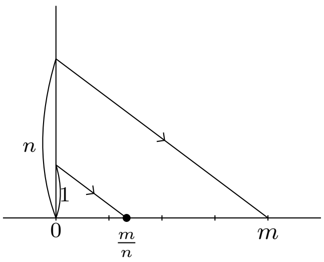
のように分類されるのである。

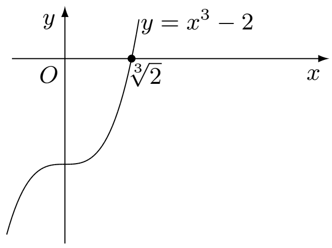
超越数の存在

超越数の代表は円周率 π である。π は文字であるが実際はただひとつの値を指す数値である。数値なら数字を用いて表せばよいようなものだが、私たちは数字を用いて π を正確な表現—閉じた表記—にすることができないのである。そのために $\pi = 3.141592\cdots$ と書くのである。この場合の "$\cdots$" は、$0.333\cdots$ の "$\cdots$" とはまったく違っている。$3.141592\cdots$ はこの先を正確に書くことができないという意味であり、$0.333\cdots$ はこの先を正確に書く必要がないという意味だからである。正

確に書くことができないとは、ひとつは無限に続くので物理的に書くことが不可能であることと、もうひとつはどのような数字が現れるか予測できないということである。正確に書く必要がないとは、ひとつはその後も無限に 3 が現れるだけであることと、もうひとつは $0.333\cdots$ と書かなくても $\dfrac{1}{3}$ と書けば正確に表せるということである。

さて、超越数の存在はどのように示せばよいだろうか。有理数 $\dfrac{m}{n}$ を数直線上に示すことなら容易にできる。原点から長さ n の垂線を立てて、図のように平行線を作図するだけだ。





代数的無理数も作図できる。作図というのは、定木とコンパスを有限回用いて、特定の長さを作ることである。その意味で代数的無理数は作図できることが知られているが、作図手順は必ずしも簡単ではない。しかし代数的無理数が代数方程式の解であり、代数方程式がグラフで描けることを認めれば、x 軸との交点がまさに求める値であることになる。いずれの場合でも、線と線の交わりが点であることから、求める数を数直線上の一点で示したことになっている。

超越数は数直線上に作図することはできないので、たとえば円周率 π は $3.14159265\cdots$ とでも書いて、“$\cdots$” は繰り返すことがない無限の数字列であることを了承することになる。そして、それは有理数の列

$$\frac{31415}{10000},\quad \frac{314159}{100000},\quad \frac{3141592}{1000000},\quad \frac{31415926}{10000000},\quad \frac{314159265}{100000000},\quad \cdots$$

の無限の彼方に現れる数とは違っている。$3.14159265\cdots$ は決して分数の形で表せないからである。もし、$\dfrac{314159265\cdots}{100000000\cdots}$ と書けばよいと思ったなら、それは間違いである。分数は整数比で表すものだが、無限の桁を持つ $314159265\cdots$ や $100000000\cdots$ は整数とは言わない。

数直線の切断

ユークリッドの原論では、

a) 点とは部分を持たないものである

b) 線とは幅のない長さである

c) 線の端は点である

ことを前提として議論が始まっている。点は存在しても部分を持たないという。現実世界ではあり得ないことなので、数学が思考の産物であることが分かるだろう。

実数の集合をひとつの直線で、任意の数をひとつの点で表すアイデアは現在でも受け継がれていて、それが数直線である。数直線がユークリッドのいう線と違うのは、長さが決まった線分ではなく無限に延びる直線であることだ。線の端が点であることは線分に対していえることで、直線に対してはいえない。

さて、思考の産物である点と同じく思考の産物である無限が組み合わさると、常識では理解しがたいことが起こる。いま 2 つの有理数 p と q があるとする。どんな p、q に対しても、たとえば $\dfrac{p+q}{2}$ は p と q の間の有理数である。したがって任意の p と q 間に有理数がないことはあり得ない。このことは、どんなに小さな区間 $[\tilde{p},\ \tilde{q}]$ を指定しても、この区間には無数の有理数が存在することを意味する。具体的な区間を $[1,\ 2]$ とすれば、ここには無数の有理点が存在している。しかし $\sqrt{2}$ の位置には有理点が存在しない。なぜなら、$\sqrt{2}$ は有理数で表せない数だからである。

この考えを 2 つの実数 r と s に置き換えてみれば、やはり最後はどんなに小さな区間 $[\tilde{r},\ \tilde{s}]$ にも無数の実数が存在することになる。しかも $\sqrt{2}$ の位置には、実数 $\sqrt{2}$ がある。

有理数の点集合は、数直線上のどんなに小さな区間をとっても、無数の有理点が存在している。実数の点集合も同様に、数直線上のどんなに小さな区間をとっても、無数の実数が存在している。この状態だけに目を向けるなら、有理数の集合も実数の集合も**稠密（ちゅうみつ）**である。では、違いはなんであろうか。

この説明に**切断**という考えを持ち込んだのがデーデキントである[1]。

点は部分を持たないので図示することができない。しかし私たちのイメージでは点は丸みを帯びた“・”である。そのような点で数直線を埋め尽くす場合、有理数だけで埋めていくと点が打たれない場所があるはずだから、イメージとして多少でこぼこがある直線になるだろう。

実数で数直線を埋め尽くせば、点が打たれない場所はないのだから、イメージとしてまっすぐな直線になるだろう。このようなイメージのもとで有理数と実数の違いを、切断という概念で表現してみよう。

---

[1]ユリウス・ヴィルヘルム・リヒャルト・デーデキント（1831–1916）：ドイツの代数学・数論を専門とする数学者。

最初に、有理数で埋めた直線を $\sqrt{2}$ の位置で切断した場合を考える。有理数で埋めた直線には $\sqrt{2}$ の位置に点がないのだから、問題なく 2 本の直線に分断される。左右に分かれた直線には端点がない。なぜなら、$\sqrt{2}$ に向かう、いくらでも $\sqrt{2}$ に近い有理数が存在するからである。

実数で埋めた直線を $\sqrt{2}$ の位置で切断した場合はどうであろうか。$\sqrt{2}$ の位置で切断したからといって、点 $\sqrt{2}$ が真っ二つに割れることはない。イメージとしては、点 $\sqrt{2}$ の真上にナイフを当てたもののナイフが点の表面を滑って、点 $\sqrt{2}$ を左右のどちらかに押しのけたことになるだろうか。右図は、点 $\sqrt{2}$ が右に分かれた直線の側に押しのけられて端点になった様子を示している。左に分かれた直線には端点はない。なぜなら、$\sqrt{2}$ に向かう、いくらでも $\sqrt{2}$ に近い実数が存在するからである。

いずれもどんなに小さな区間にも無数の数が存在していることに変わりない。違いは、有理数の点集合は単に稠密であることである。稠密とは数が密集しているさまをいう。ただし密集しているが隙間もある。実数の点集合は単に稠密であるだけでなく隙間がない。このような実数の状態は**連続**という。日常的には、連続とはつながっている意味に使うのだろうが、数直線においては、あからさまにつながっているから連続というのではなく、隙間がないから連続というのである。