平方根の近似値の求め方 A

たとえば $\sqrt{2} \approx 1.41421356$ は語呂合わせで「ひとよひとよにひとみごろ（一夜一夜に人見頃）」などと覚えている人もいるだろう。ちなみに代表的な近似値の語呂合わせには以下のようなものがある。

$\sqrt{3} \approx 1.7320508$ ひとなみにおごれや（人並みに奢れや）

$\sqrt{5} \approx 2.2360679$ ふじさんろくおうむなく（富士山麓オウム鳴く）

$\sqrt{6} \approx 2.44949$ によよくよく（似よ良く良く）

$\sqrt{7} \approx 2.64575$ [菜] にむしいない（[菜] に虫いない）

$\sqrt{10} \approx 3.1622$ [10 人] みいろにならぶ（[10 人] 三色に並ぶ）

抜けているところの $\sqrt{4} = 2$、$\sqrt{9} = 3$ であることはすぐ分かるし、$\sqrt{8} = \sqrt{4}\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ より $\sqrt{2}$ の 2 倍であることが分かるので、わざわざ語呂合わせにすることもない。

では、これら近似値はどのようにして求めたのだろうか。現代では電卓やコンピュータで即座に値が出るが、そのような道具がなかった時代でも平方根は計算されていた。以前、1.1^2, 1.2^2, 1.3^2, 1.4^2, 1.5^2 を順に計算しながら、$\sqrt{2}$ の値を調べたことを思い出しただろうか。たしかにこの方法でも近似値は求められる。しかし、これはあまりにも勘に頼った方法で、実際に手間もかかる。そこで、筆算で割り算をするようにして平方根を求める方法が考案されている。

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & & & \\
1^{b} & & & & \\
1^{b} & & & & \\ \cline{1-2}
2^{e} & \underline{4^{f}} & & & \\
 & \underline{4^{f}} & & & \\ \cline{1-3}
2 & 8^{e'} & 1^{f'} & & \\
 & & 1^{f'} & & \\ \cline{1-4}
2 & 8 & 2 & 4 & \\
 & & & 4 & \\ \cline{1-5}
2 & 8 & 2 & 8 & \square \\
 & & & & \square
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccccc}
 & 1.^{b} & 4^{f} & 1 & 4 & \square \\ \cline{2-6}
) & 2.^{a} & 00 & 00 & 00 & 00 \\
 & 1^{c} & & & & \\ \cline{2-3}
 & 1 & 00^{d} & & & \\
 & & 96^{g} & & & \\ \cline{2-4}
 & & 4 & 00^{d'} & & \\
 & & 2 & 81 & & \\ \cline{3-5}
 & & 1 & 19 & 00 & \\
 & & 1 & 12 & 96 & \\ \cline{3-6}
 & & & 6 & 04 & 00
\end{array}
$$

筆算は小数点を基準に、整数部分と小数点以下を 2 桁ずつ区切ることから始める。まず、2 桁ずつ区切った左端の数に注目する（^{a}）。例では 2. に注目することになる。この数に対して $\square \times \square \leq 2$ を満たす最大の整数を見つけ、筆算をしている左側に縦に並べて書くことにする（^{b}）。例では 1 が相当している。次に、いま縦に並べた数の積—$1 \times 1 = 1$—を最初に注目した数 2 の下に書き引き算をする（^{c}）。計算を続けるために、ふつうの割り算と同じように数を下ろしてくるのだが、下ろす数は 2 桁まとめて下ろすことに注意する（^{d}）。

さて、ここから引かれるべき数を見つけるのだが、それは先ほど左側に並べて書いた 1, 1 を利用する。まず、縦に並べた数を足す（^{e})。続けてその数に一桁付け足して $2\square\times\square\leq 100$ を満たす最大の数□を見つけ、縦に並べて書く（^{f})。例では$\underline{4}$を見つけることができた。そこで、いま縦に並べた数の積—$24\times 4=96$—を筆算の続きの数として書き、引き算をする（^{g})。

また計算を続けるために、数を 2 桁下ろしてくる（$^{d'}$)。このとき、左側には 24, 4 が縦に並んでいるのでこれらを足し（$^{e'}$)、続けてその数に一桁付け足して $28\square\times\square\leq 400$ を満たす最大の数□を見つける（$^{f'}$)。この場合、$\square=1$ が見つかるので、この後は「(^{f} 側を）掛けて、(^{d} から）引いて、(^{f} 側を）足して、それに一桁付け足して. . . 」の繰り返しでよい。

ところで、この筆算で開平ができる理屈を確認しておこう。いま整数 n が

$$n=\left(a+\frac{b}{10}+\frac{c}{100}+\frac{d}{1000}+\cdots\right)^2$$

で表されているとする。$b, c, d, \ldots$ は一桁の非負整数であるとしよう—要するに $0, 1, 2, \ldots, 9$ のどれかである。簡単のため a も一桁の整数としておく。ここで右辺を展開するのだが、

$n=\left(a+\frac{b}{10}+\frac{c}{100}+\frac{d}{1000}+\cdots\right)\left(a+\frac{b}{10}+\frac{c}{100}+\frac{d}{1000}+\cdots\right)$

と見て順に項の積を作ってみよう。無限の項があるので、まず $(a+\cdots)(a+\cdots)$ の部分だけ見ると a^2 が現れることが分かる。次に視野を広げて $\left(a+\frac{b}{10}+\cdots\right)\left(a+\frac{b}{10}+\cdots\right)$ の部分だけ見ると、新たに $a\cdot\frac{b}{10}$ が 2 項と $\frac{b}{10}\cdot\frac{b}{10}$ の項が現れることが分かる。さらに視野を広げて $\left(a+\frac{b}{10}+\frac{c}{100}+\cdots\right)\left(a+\frac{b}{10}+\frac{c}{100}+\cdots\right)$ の部分だけ見ると、新たに $\left(a+\frac{b}{10}\right)\frac{c}{100}$ が 2 項と $\frac{c}{100}\cdot\frac{c}{100}$ の項が現れることが分かる。このような見方をすると

$n=a^2+\left(2a+\frac{b}{10}\right)\frac{b}{10}+\left(2a+\frac{2b}{10}+\frac{c}{100}\right)\frac{c}{100}+\left(2a+\frac{2b}{10}+\frac{2c}{100}+\frac{d}{1000}\right)\frac{d}{1000}+\cdots$

のように展開できることが分かるだろう。これを通分して

$n=a^2+\frac{20a+b}{10}\cdot\frac{b}{10}+\frac{200a+20b+c}{100}\cdot\frac{c}{100}+\frac{2000a+200b+20c+d}{1000}\cdot\frac{d}{1000}+\cdots$

である。

さて、ここで開平の計算を振り返ってみよう。主たる計算は割り算のように、何らかの積を順次減らして行ったのである。このことは順次

$n-a^2$

$(n-a^2)-\frac{20a+b}{10}\cdot\frac{b}{10}$

$\left(n-a^2-\frac{20a+b}{10}\cdot\frac{b}{10}\right)-\frac{200a+20b+c}{100}\cdot\frac{c}{100}$

$\left(n-a^2-\frac{20a+b}{10}\cdot\frac{b}{10}-\frac{200a+20b+c}{100}\cdot\frac{c}{100}\right)-\frac{2000a+200b+20c+d}{1000}\cdot\frac{d}{1000}$

$\vdots$

の計算をしていたことになる。引かれる数は順に

$$a^2, \quad \frac{(20a+b)b}{100}, \quad \frac{(200a+20b+c)c}{10000}, \quad \frac{(2000a+200b+20c+d)d}{1000000}, \quad \cdots$$

である。分母は 2 桁ずつ増えているので、減じる数は 2 桁ずつ小さい方へずらす必要がある。減じる数は分子の値である。最初は a^2 であるから、これは簡単に引ける。問題になるのは、その次に減じる値である。どのように計算するのであろうか。しかし減じる式を順に見ると、特徴が浮かんでくる。次に減じる式は、

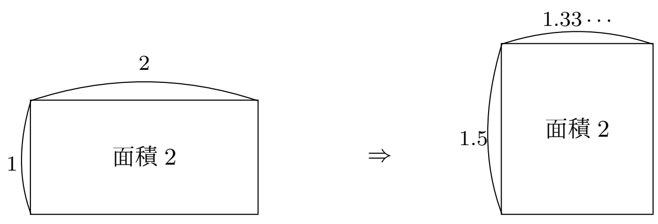
直前に積を計算した 2 数の和の 10 倍に次の桁を加え、それに次の桁を掛けている

ことが分かる。筆算の左側で行った計算はまさにこれだったのである。

$$\begin{array}{lll}
 & & \overline{1.^{a}\ \ 4^{b}\ \ 1^{c}\ \ 4^{d}} \\
 & 1^{a} &)\,2.\ \ 00\ \ 00\ \ 00 \\
 & \underline{1^{a}} & \underline{1} \\
20a+b & \rightarrow 2\ \ 4^{b} & 1\ \ 00 \\
 & \underline{4^{b}} & \underline{96} \\
200a+20b+c & \rightarrow 2\ \ 8\ \ 1^{c} & 4\ \ 00 \\
 & \underline{1^{c}} & \underline{2\ \ 81} \\
2000a+200b+20c+d & \rightarrow 2\ \ 8\ \ 2\ \ 4^{d} & 1\ \ 19\ \ 00 \\
 & 4^{d} & 1\ \ 12\ \ 96
\end{array}$$

平方根の近似値の求め方 B

別の方法も試してみよう。$\sqrt{2}$ の値は面積が 2 の正方形の一辺の長さであるから、面積 2 の正方形が作図できればよいことになる。作図といっても定木やコンパスを使うのでなく、電卓またはコンピュータで擬似的に作図をする。それは次のようにする。



まず、面積 2 の図形として 1×2 の長方形を考える。一般に $\sqrt{a}$ の値を知りたい場合は $1 \times a$ の長方形から始めるとよい。さて 1×2 の長方形を、面積を変えずに縦と横を同じ長さにしたい。一度に同じ長さにすることは難しいので、互いに値を近づけるとよいだろう。そのためには縦と横の平均の長さを利用するのがよい。この場合は $\dfrac{1+2}{2} = 1.5$ を使い、これを縦の長さにする。面積は

2 でなくてはならないので、このときの横の長さは自動的に $2 \div 1.5 = 1.3333333$ となる。電卓を想定して有効桁数を 8 で考えた。縦と横の長さは接近したが、等しいわけではないので、同じことを繰り返すことにする。今度は 1.5 と 1.3333333 の平均である 1.4166666 を縦の長さにすると、横の長さは 1.4117647 になる。

これを表計算ソフトウェアの Microsoft Excel でシミュレーションしてみよう。

◇	A	B	C	D	E	F
1	2	1				
2	(* A2)	(* B2)				
3	↓下へコピーする	↓下へコピーする				
4	↓	↓				
5	↓	↓				
6	↓	↓				

※ セルの式
(A2)　`=(A1+B1)/2`
(B2)　`=$A$1/A2`

A1 セルは 2 であるから、これで $\sqrt{2}$ の近似値が求められる。あっという間に左右の値が同じになることが分かるだろう。

＊　＊　＊

無理数を小数展開するとき、何か法則のようなものがあると便利だと考えているかもしれない。しかし、そのようなものはない。なぜなら「有理数でない数が無理数である」からだ。これを別の言い方にすると「$\dfrac{m}{n}$ で表せない数が無理数」ということである。$\dfrac{m}{n}$ は小数にすると割り切れるか、または**循環小数**になる。すなわち「循環小数で表せない数が無理数」となるのである。ところで、$\dfrac{m}{n}$ が割り切れないときに循環小数になる理由は簡単だ。$m \div n$ を計算して余りが出れば、それは $1, 2, \ldots, (n-1)$ のどれかである。つまり余りは**高々**$(n-1)$ 個しかないのである。割り算を繰り返せば、遅くとも n 回めまでに以前と同じ余りを目にする。そこから先は同じことが繰り返されるだけなのである。これは言うなれば循環小数の法則である。この法則に当てはまらないのが無理数だから、無理数の小数展開に法則はないと言える。▮