平方根の性質

根号を用いて表された数 $\sqrt{a}$ の加減乗除を考えてみる。$a \geq 0$、$b \geq 0$ とし、a、b の平方根のうち負でないものをそれぞれ $\sqrt{a}$、$\sqrt{b}$ とする[1]。はじめに $\sqrt{a}$ と $\sqrt{b}$ である積の $\sqrt{a}\sqrt{b}$ を見ることにする。

ここで $(\sqrt{a}\sqrt{b})^2$ を考える。これは

$$\begin{aligned}(\sqrt{a}\sqrt{b})^2 &= (\sqrt{a}\sqrt{b})(\sqrt{a}\sqrt{b}) \\ &= \sqrt{a}\sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{b} \\ &= (\sqrt{a})^2(\sqrt{b})^2 \\ &= ab\end{aligned}$$

となる。$\sqrt{a}\sqrt{b}$ は 2 乗して ab になるのだから、$\sqrt{a}\sqrt{b}$ は ab の平方根である。同時に平方根の記述の定義から、ab の平方根は $\sqrt{ab}$ である。よって

$$\boxed{\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}}$$

が分かった。

同様に、$\left(\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \dfrac{a}{b}$ であることと、$\dfrac{a}{b}$ の平方根が $\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ であることから、

$$\boxed{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}}$$

が分かる。ただし、除算においては $b \neq 0$ である。

次に加減算を考える。ところで $\sqrt{2} \approx 1.414$、$\sqrt{3} \approx 1.732$、$\sqrt{5} \approx 2.236$ であるから、$\sqrt{2}+\sqrt{3} \neq \sqrt{5}$ であることは明らかである[2]。基本的に根号がついた数は加算できないが、同じ値ならいくつでも加算できる。なぜなら、

$$\underbrace{a + a + a + \cdots + a}_{k \text{ 個}} = ka$$

であるから

$$\underbrace{\sqrt{a} + \sqrt{a} + \sqrt{a} + \cdots + \sqrt{a}}_{k \text{ 個}} = k\sqrt{a}$$

[1]記号 $\geq$ は数学の教科書などでは $\geqq$ が使われることが多いが、国際的にも TEX でも $\geq$ が標準である。

[2]記号 $\approx$ は “ほぼ等しい” を表す。数学の教科書では $\fallingdotseq$ のような記号が使われているかもしれないが、TEX では $\approx$ が標準である。

がいえる。ここで $k=m+n$ と見れば

$$\underbrace{\overbrace{\sqrt{a}+\sqrt{a}+\cdots+\sqrt{a}}^{m\text{ 個}}+\overbrace{\sqrt{a}+\cdots+\sqrt{a}}^{n\text{ 個}}}_{k\text{ 個}}=m\sqrt{a}+n\sqrt{a}$$

でもあるので、$k\sqrt{a}$ を $(m+n)\sqrt{a}$ に書き直して

$$\boxed{m\sqrt{a}+n\sqrt{a}=(m+n)\sqrt{a}}$$

であることが分かる。この式で左辺の $n\sqrt{a}$ を右辺へ移項し、$m+n=\tilde{m}$、$n=\tilde{n}$ とおくと $m=\tilde{m}-\tilde{n}$ になるから

$$\boxed{\tilde{m}\sqrt{a}-\tilde{n}\sqrt{a}=(\tilde{m}-\tilde{n})\sqrt{a}}$$

も分かる。このことは、$\sqrt{}$ がついた数の計算は、文字式の計算が $7a-3a=4a$ であるように $7\sqrt{2}-3\sqrt{2}=4\sqrt{2}$ と計算できることを示している。

分母の有理化

新たに平方根が加わったことで、数の世界にも広がりが見えてきた。これまでのところ数は有理数を扱ってきただけであったが、今後は $1+\sqrt{5}$ や $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のような数を扱うことができる。ただし、有理数と根号を含む数はこれ以上簡単に記述することはできない。しかし、$\sqrt{5}\approx 2.24$、$\sqrt{7}\approx 1.73$ であるから

$$1+\sqrt{5}\approx 1+2.24=3.24,\qquad \frac{\sqrt{3}}{2}\approx\frac{1.73}{2}=0.865$$

と計算することはできる。

*　*　*

近似値の計算で　$1+\sqrt{5}\approx 1+2.24=3.24$　のような書き方をしたのだが、これを見て、最後の値は近似値なのだから

$$1+\sqrt{5}\approx 1+2.24\approx 3.24$$

のほうが実情に合っていると思った人がいるかもしれない。しかし理屈の上では、$1+\sqrt{5}$ を $1+2.24$ にするのは近似値を用いることになるので $\approx$ を使うべきだし、$1+2.24$ が 3.24 になることはまぎれない事実なので $=$ を使うべきなのである。要するに、最後の値が近似値かどうかではなく、前後の関係がほぼ等しいのか完璧に等しいのかが問題なのである。そのような観点に則れば

$$1+\sqrt{5}=1+2.2360679\cdots\approx 1+1.236=2.236\approx 2.24$$

という書き方は納得されるだろう。▮

いま、$\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ の近似値を計算することになったとしよう。$\sqrt{3} \approx 1.73$ を用いて電卓をたたけば $\dfrac{2}{\sqrt{3}} \approx \dfrac{2}{1.73} = 1.1560693$ が表示される。では、この値はどの桁まで信用がおけるのだろうか。かりに 1.73 までは信用がおけるとしたら、もう一桁正確な計算は

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & & & 1. & 1 & 5? \\ \cline{6-11}
1 & 7 & 3 & ? &) & 2 & 0 & 0 & 0 & & \\
 & & & & & 1 & 7 & 3 & ? & & \\ \cline{6-11}
 & & & & & & 2 & 6 & ? & 0 & \\
 & & & & & & 1 & 7 & 3 & ? & \\ \cline{6-11}
 & & & & & & & \substack{9?\\8?} & ? & ? & 0
\end{array}
$$

のようになされるはずであろうが、いちばん下の行が 9 で始まるか 8 で始まるかが不明である。したがって、商の 1.15 はすでに怪しい値と思わざるを得ない。

このように、分母に根号を含む数があるときは近似値の計算が大変である。そこで次のような考えが有効である。いまの例では、分数を通分する感覚で分子・分母に $\sqrt{3}$ を掛けるとよい。すると

$$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{2 \times 1.7320508\cdots}{3} = 1.15470\cdots$$

のような手順でどこまでも正確な計算ができるので、適当なところで切った近似値は十分に精確な値となる。このような操作を**分母の有理化**という。$(\sqrt{a})^2 = a$ であることを利用したうまい方法である。

次に、$\dfrac{1}{1+\sqrt{5}}$ の近似値を求めてみよう。この場合は、単に $\sqrt{5}$ を分母に掛けても分母が有理数になるわけではないから、ちょっとした工夫が要る。展開公式に $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ があったことを思い出してもらいたい。これは、和と差の積が平方の差になっているので、a や b に根号が含まれていても必ず有理数になる。そこで、分母が $1+\sqrt{5}$ であれば、分子・分母に $1-\sqrt{5}$ を掛けるとうまくいくはずである。実際の計算は以下のとおりである。

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{1+\sqrt{5}} &= \frac{1-\sqrt{5}}{(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})} \\
&= \frac{1-\sqrt{5}}{1-(\sqrt{5})^2} \\
&= \frac{1-\sqrt{5}}{1-5} \\
&= \frac{1-\sqrt{5}}{-4} \\
&= \frac{1-2.2360679\cdots}{-4} = 0.80901\cdots
\end{aligned}
$$

二重根号

ルートの計算の中には根号が二重になってしまうものがあり、運良く二重根号を解消できる場合がある。ちょっとした技巧を要するが知っておいて損はない。

たとえば $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$ は二重根号の解消ができる。根号を消すために使うのは

$$\sqrt{a^2} = a$$

という性質である。ただし $a>0$ を仮定しておく。$a<0$ でもかまわないのだが、その場合は細かいことに注意を払わなくてはならないので、方程式に関連して話すことにしよう。

さて $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$ であるが、7 を $3+4$ と見た上で、さらに $3+4$ を $(\sqrt{3})^2+(\sqrt{4})^2$ と見ておく。また、$4\sqrt{3}$ は

$$4\sqrt{3} = 2\cdot 2\sqrt{3} = 2\sqrt{4}\sqrt{3} = 2\sqrt{12}$$

のように $2\sqrt{X}$ の形にするのがコツである。以上の準備によって

$$\begin{aligned}\sqrt{7-4\sqrt{3}} &= \sqrt{3+4-2\sqrt{12}} \\ &= \sqrt{(\sqrt{3})^2-2\sqrt{3}\sqrt{4}+(\sqrt{4})^2} \\ &= \sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{4})^2}\end{aligned}$$

となることが分かるだろう。なぜなら $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$ の因数分解の公式にちょうど当てはまるからである。

$\sqrt{a^2}=a$ であったが $a>0$ を仮定していたので、上の式は $\sqrt{(\sqrt{4}-\sqrt{3})^2}$ と見直す必要がある。よって

$$\sqrt{7-4\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{4}-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4}-\sqrt{3} = 2-\sqrt{3}$$

のように、二重根号を解消できるのである。