無理数

整数の素因数分解について見てきたが、数学で使う数は整数に限らない。日常的にも小数や分数を使っているが、数学では分数と小数の区別は本質的ではない。たとえば $\dfrac{5}{8} = 0.625$ であるから、まったく同じ値である $\dfrac{5}{8}$ と 0.625 をわざわざ "分数" と "小数" のように、あたかも違う種類の数のように呼ぶことはふさわしくない。これらは "分数表記"、および "小数表記" と呼ばれるべきで、数としてはどちらも**有理数**に分類される数である。

では、有理数とはどのような数かといえば、それは

$$\boxed{\text{整数 } m, n \text{ を用いて } \dfrac{m}{n} \text{（ただし } n \neq 0\text{）の形で表すことができる数}}$$

と定義されている。要するに整数比で表せる数のことである。整数 x は $\dfrac{x}{1}$ なので、整数は有理数でもある。ちなみに、整数比 $\dfrac{m}{n}$ は $m : n$ のことである。また $n \neq 0$ は、分母が 0 の分数は定義しない約束があるので記述している。

* * *

有理数の定義に関して、なぜ分母が 0 の分数を定義しないことを "約束" するのだろう。素直に "定義できない" ではいけないのだろうか。その理由は以下のことによる。

まず、$k \times 0 = 0$ である。これを定義ととらえてもかまわないのだが、$x - x = 0$ であることを利用すると

$$k \times 0 = k(x - x) = kx - kx = 0$$

となることから分かる。さて $\dfrac{a}{0} = a \div 0$ であるが、これが計算できて何らかの値 k になったとすると $a \div 0 = k$ ということである。割り算は掛け算に書き換えることができるので、これは $a = k \times 0$ を意味する。$k \times 0 = 0$ であったので、$a = 0$ ならば等式は $0 = k \times 0$ を表すので正しい。しかし等式は正しいけれど、それでは k の値がいくつか問われても、それを決めることができない。なぜなら、k が何であっても等式は正しいからである。この場合、k の値は**不定である**という。

では、$a \neq 0$ の場合はどうか。このときは $a = k \times 0$ は絶対成り立たない。左辺の a は 0 でないのに右辺の $k \times 0$ は 0 だからである。この場合、式自体が正しくないので**計算不能である**という。

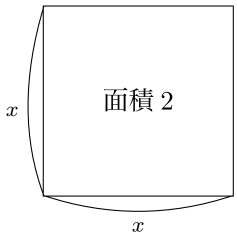
以上のことから $\dfrac{a}{0}$ は

$$\begin{cases} \dfrac{a}{0} \quad \to \quad \text{不定} \quad (a = 0 \text{ のとき}) \\ \dfrac{a}{0} \quad \to \quad \text{不能} \quad (a \neq 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定義できる。

しかしこのように定義しても、結局 $\dfrac{a}{0}$ の値が確定することはないため、定義をする意味がない。そこで、定義をしないと約束したのである。▮

さて、整数比を用いれば望み通りの精度で数を記述できる。たとえば円において、円周の長さと直径の比を 10 桁の精度で示したければ $\dfrac{3141592653}{1000000000}$ とすればよい。しかし、円周率は整数比にならないことが知られている。整数比で表すことができない数は**無理数**と呼ばれる。もう少し具体的な例で考えよう。



一辺の長さが x である正方形の面積を考えたとき、もし面積が 16 ならば $x = 4$ である。また、面積が $\dfrac{4}{9}$ ならば $x = \dfrac{2}{3}$ である。では、正方形の面積が 2 だったら、一辺の長さはいくつだろうか。x が整数でないことは明らかである。整数でなければ、おそらく $\dfrac{m}{n}$ と書ける数であろう。ところが、この数は整数比で書けないことを次のようにして示すことができるのである。

有理数でないことの証明

いま、正方形の一辺の長さを x としたとき、$x^2 = 2$ となる数が $x = \dfrac{m}{n}$ の形で表せたと**仮定**しよう。このとき、m, n に共通の約数があれば約分できるので、約分した上で改めて $\dfrac{m}{n}$ を考えることにする。したがって、m と n は共通の約数を持たない。すると $x^2 = 2$ は

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2 \quad \text{すなわち} \quad \frac{m^2}{n^2} = 2$$

と書けるはずである。この式は $m^2 \div n^2 = 2$ のことなので、$m^2 = 2n^2$ と同じことである。

さて右辺の $2n^2$ であるが、n の値が不明でも、2 倍されていることから偶数であることは間違いない。等式は左辺と右辺が等しいはずだから、右辺が偶数なら左辺の m^2 も偶数である。

ところで、m^2 は 2 倍されているわけではないので、これが偶数であるためには m 自体が偶数でなければならない。なぜなら (偶数)^2 = (偶数)、(奇数)^2 = (奇数) だからだ。すると m は何らかの数の 2 倍になっているはずなので、$m = 2a$ と書き直そう。このことから $m^2 = 2n^2$ は

$$(2a)^2 = 2n^2 \quad \text{すなわち} \quad 4a^2 = 2n^2$$

と書けることになった。この式は、左辺が 4 の倍数、右辺が 2 の倍数を表しているので共通の約数 2 を持つ。共通の約数 2 で約すと $2a^2 = n^2$ である。

さて左辺の $2a^2$ であるが、a の値が不明でも、2 倍されていることから偶数であることは間違いないので、右辺の n^2 も偶数である。n^2 が偶数ならば n も偶数であることは先のとおりである。そこで $n = 2b$ と書き直そう。

ここで、始めの仮定を思い出してほしい。仮定では、$x=\dfrac{m}{n}$ で、m と n は共通の約数を持たない数であった。ところが、これまでの話で $m=2a,\ n=2b$ と書けることになっている。つまり、共通の約数を持たないはずの $m,\ n$ に、共通の約数 2 が存在するという**結論**に至ったことになる。途中の論説に不備はないので、不合理な結論に至った原因は仮定にある。すなわち、$x^2=2$ となる数が $x=\dfrac{m}{n}$ の形で表せると仮定したことが原因である。仮定は間違っている。ゆえに、$x^2=2$ となる数は $x=\dfrac{m}{n}$ の形で書けない。

このように、仮定をもとに論証を重ねたとき、不合理な結論に至るために仮定は間違っているとする証明方法を、**背理（はいり）法**または**帰謬（きびゅう）法**と呼ぶ。

平方根

$x^2=2$ を満たす数 x が $\dfrac{m}{n}$ で表せなくても、x が具体的にどのような値か調べることはできる。たとえば $1^2=1$、$2^2=4$ であるから $x^2=2$ となる x は $1.abc\cdots$ という数であろう。

$1^2=1$	$1.1^2=1.21$			
$2^2=4$	$1.2^2=1.44$			
	$1.3^2=1.69$			
	$1.4^2=1.96$	$1.41^2=1.9881$	$1.411^2=1.990921$	
	$1.5^2=2.25$	$1.42^2=2.0164$	$1.412^2=1.993744$	
			$1.413^2=1.996569$	
			$1.414^2=1.999396$	$1.4141^2=\cdots$
			$1.415^2=2.002225$	

小数点以下第 1 位を確定するために、表のように $1.1^2,\ 1.2^2,\ 1.3^2,\ 1.4^2,\ 1.5^2$ を順に計算してみると、1.4^2 と 1.5^2 の間で 2 をまたいでいることが分かる。このことから x は $1.4bc\cdots$ という数であろう。続いて小数点以下第 2 位を確定するために、1.41, 1.42 の順に計算してみると、1.41^2 と 1.42^2 の間で 2 をまたいでいることが分かる。そこで x は $1.41c\cdots$ まで確定する。同じようにして小数点以下第 3 位では、1.414 と 1.415 の間で 2 をまたぐので、x は $1.414\cdots$ が分かる。

このように、小数点以下第 4 位、第 5 位、第 6 位、... と桁を増やしていくと、やがて x の値として

$$x=1.41421356\cdots$$

という数字の列が浮かび上がってくる。もちろん、この数字の列に終わりはない。なぜなら、もし数字の列が遠い遠い先に N で終わっていたとしたら、x は $\dfrac{1414\cdots N}{1000\cdots 0}$ という分数で表されることになる。しかし、先ほど証明したように x は分数では表せないのである。

このように数値としておよその値は分かるのだが、正確な値を表すには無限に続く数字の列になってしまうような場合、私たちが取るべき道は 2 つある。ひとつは概数で扱うことで、実際日常のほとんどすべての用途はこれで充分である。しかし、数学として数値を考えたときは充分とはいえない。それは、$0.333\cdots$ はきっちり $\dfrac{1}{3}$ であるが、$0.333\cdots$ を途中で切った $0.333\cdots 3$ は $\dfrac{333\cdots 3}{1000\cdots 0}$ であって、$\dfrac{1}{3}$ にわずかに足りない数であることから、明らかに区別して扱うべきだからである。

すると、x を正確な値で表すためには、もうひとつの道を選ばなくてはならない。そこで $x^2 = a$ となる数 x を $\sqrt{a}$ と表すことにする。$\sqrt{}$ は**根号（こんごう）**と呼ばれる記号で、$\sqrt{a}$ は “ルート a” と読む。したがって、$x^2 = 2$ となる数は $x = \sqrt{2}$ と書き、ルート 2 と読む。$\sqrt{2}$ は 2 乗すると—つまり平方すると—2 になる根っこの数であることから、2 の**平方根**と呼ばれる。

ところで、$3^2 = 9$ であるのと同時に $(-3)^2 = 9$ でもある。このことは $\sqrt{2}$ にも言えることで、$(\sqrt{2})^2 = (-\sqrt{2})^2 = 2$ であるから、実際には 2 の平方根は $\sqrt{2}$ と $-\sqrt{2}$ がある。これをまとめて、2 の平方根は $\pm\sqrt{2}$ であると書く。一般に平方根は

> $a > 0$ のとき、2 乗すると a になる数を a の平方根と呼び、$\pm\sqrt{a}$ と表す
>
> とくに 0 の平方根は 0 と定める

と定義される。

* * *

平方根の定義に関して、$a > 0$ の場合と $a = 0$ の場合を分けて記述したことを注意しておこう。分けた理由は、$\sqrt{0} = 0$ であることではない。たとえば 2 乗して 9 になる数は、定義に従えば $\pm\sqrt{9}$ であるが実際は ± 3 である。このような場合はふつう $\sqrt{9}$ という記述は用いないが、定義通り $\pm\sqrt{9}$ と書いても、それは結局 $+3$ か -3 を表すので問題ない。しかし、$\pm\sqrt{0}$ と書いてしまうと、それは $+0$ か -0 を表すことになって都合が悪い。なぜなら、0 は正でも負でもない数と定義されているからである。つまり、$+0$ や -0 という “数” はないのである。▮