因数分解

分配法則をもう一度見てみよう。

$$m(a+b)=ma+mb$$

等式は多くの場合、左の式を計算した結果が $=$ の右側に書かれるように使われるが、等号は左右が等しいときに使うものだから、右側の式を計算した結果が $=$ の左側に書かれたと見てもよい。実際、横書きの右から左へ読み書きする言語はあるし、日本でも大正、昭和の初めにはそうであった。さて、等号の右側—**右辺**という—は加法である。加法においては、$+$ でつながれたそれぞれの式を項と呼んでいた。次に、等号の左側—**左辺**という—を見ると、$(a+b)$ という和を含むが実は m と $(a+b)$ の乗法である。乗法においては、掛け算を構成している式は**因数**と呼ばれる。この場合、m と $(a+b)$ が因数である。多項式を因数の積で表すことを**因数分解**と呼ぶ。

そうすると前に見た展開公式は、左辺から右辺を見ると展開だが、右辺から左辺を見ると因数分解となっている。因数分解は数学の式を読み解く際に欠かせないものである。そこで、展開公式と重複してしまうが、左辺と右辺を入れ替えた形で書き直しておこう。そこで、いちばん基本となる式は

$$\boxed{ma+mb=m(a+b)}$$

である。このようなものは、**共通因数をくくり出す**因数分解として多用される。

2 乗が関わる因数分解は

$$\boxed{\begin{array}{rcll} a^2\pm 2ab+b^2 &=& (a\pm b)^2 & [\text{複号同順}] \\ a^2-b^2 &=& (a+b)(a-b) & \\ x^2+(a+b)x+ab &=& (x+a)(x+b) & \\ acx^2+(ad+bc)x+bd &=& (ax+b)(cx+d) & \end{array}}$$

である。ここで複号同順というのは、$+$ と $-$ の符号を合わせた記号 $\pm$ や $\mp$ の読み方を指す。複号を読むとき、常に上の符号を読むか常に下の符号を読むかということで、常に上の符号を読めば

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$$

であり、常に下の符号を読めば

$$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$$

という公式になる。

また、たとえば $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$ は項のすべてが $+$ であるが、実際は a や b に負の値も使われる。式が x^2-5x+6 であれば $x^2+(-2-3)x+(-2)(-3)$ と見て公式を使うのである。このようなことは数多くの練習問題を解いて身につけなければいけない。

3 乗が関わる因数分解は

$$\boxed{\begin{array}{rcl} a^3 \pm 3a^2b+3ab^2 \pm b^3 &=& (a \pm b)^3 \\ a^3 \pm b^3 &=& (a \pm b)(a^2 \mp ab+b^2) \end{array}}$$

である。これらも複号同順である。

以上が主だった因数分解の型であるが、展開公式同様、柔軟に使えるような訓練が欠かせない。

因数分解の例

単純な因数分解には公式がそのまま使える。$4a^2-12ab+9b^2$ であれば、この式を $(2a)^2-2(2a)(3b)+(3b)^2$ と見ることによって

$$4a^2-12ab+9b^2=(2a-3b)^2$$

となることが分かる。また、$4a^2-16ab+16b^2$ を $(2a)^2-2(2a)(4b)+(4b)^2$ と見れば

$$4a^2-16ab+16b^2=(2a-4b)^2 \quad (※)$$

であるのだが、この場合は

$$\begin{array}{rcl} 4a^2-16ab+16b^2 &=& 4(a^2-4ab+4b^2) \\ &=& 4(a-2b)^2 \end{array}$$

とするのがよい。なぜなら、より**簡単な**式になっているからである。（※）の因数分解が間違いであるとは言わないが、数学では分数の約分に見られるように、より簡単な表し方があるならばそちらを採用する習慣がある。因数分解はまさに簡単な要求にかなっているのである。では、何を簡単であると考えているのだろうか。それは、左辺が 2 乗の項と 2 文字の項の和であるのに対して、右辺は 1 文字の項の和を 2 乗している点である。簡単であることは多少感覚に負う面があるので、左辺より右辺が簡単であることの実感がわいてこないかもしれない。しかし、そういうものなのである。

さて、因数分解に習熟するには問題演習が欠かせないものであるが、ここでは問題演習を行うことはしない。問題演習をしなければ、たとえば

$$6x^2+11x-10=(2x+5)(3x-2)$$

が正しい因数分解であることは、右辺を展開して確認することはできるのだが、それでは $6x^2+11x-10$ からどのようにして右辺の組合せを見つけたのかがはっきりしない。式の形から $acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$ が使われたことは明らかであるから、$6=2\cdot3$、$-10=5\cdot(-2)$ なのである。このとき、$6=1\cdot6$ や $-10=(-5)\cdot2$ ではいけないのかというと、それでは $ad+bc$ が 11 にならないからだめなのである。

こういうことは公式を見ているだけでは分からない。実際は、

$$\begin{array}{ccccccc} \boxed{6} & & \boxed{-10} & & & & \\ 2 & & 5 & \to & 15 & & \\ 3 & & -2 & \to & \underline{-4} & & (+ \\ & & & & 11 & & \end{array}$$

のように、6 と -10 を 2 つの積に分けて縦に書き、それらを斜めに掛け合わせた合計を右端に書き、その和 11 が x の係数に等しいことを確認するのである。**たすき掛け**として知られる方法であるが、このようなことは公式を見ただけでは発見できないであろう。そのことを知り身につけるには、問題集に頼ることがいちばんよいのである。

* * *

$6x^2+11x-10$ を因数分解すると $(2x+5)(3x-2)$ になることは理解できたと思うが、x の項からなる式の積に直すなら

$$6x^2+11x-10=\left(x+\frac{5}{2}\right)(6x-4)$$

としても同じことである。このことは右辺を展開すれば確かめることができる。しかしこの場合は、式の中に分数が現れてしまい簡単になった印象が薄い。数学の習慣では、もともと整数だけで表されている式を、わざわざ分数を使って因数分解をすることは滅多にない。数学の習慣は長い時間をかけて培われてきているので、数学に慣れ親しんでいる者には自然なことが、不慣れな者には不自然に感じることがあるものである。いまここで、整数を分数にして因数分解をすることはないと言ったが、まれにそのようにすることもある。それは、計算上のテクニックであることもあれば、問題解決に必要な変形であることもある。基本に忠実であることは大事なことだが、基本から離れた考えができることも重要なのである。▮

特殊な因数分解

ここで少し特殊な因数分解について触れてみたい。まず、x^4+x^2+1 の因数分解を試みよう。x^2+x+1 が整数係数の範囲で因数分解できないことを知っている者なら、似た形の x^4+x^2+1 も無理なような気がするがそうではない。これは

$$\begin{aligned} x^4+x^2+1 &= x^4+2x^2+1-x^2 \\ &= (x^2+1)^2-x^2 \end{aligned}$$

$$= \quad (x^2+1+x)(x^2+1-x)$$

のような手順で因数分解ができる。

これは決して特殊な能力を必要とする例ではない。十分に練習問題に取り組んだ上で、筋道を立てて考えられるなら、解けることが期待できる問題であろう。その場合の思考過程は、x^4+2x^2+1 であれば $a^2+2ab+b^2$ に当てはまるのになあ...から始まるはずである。そして、$2x^2$ が必要ならどこかで $-x^2$ を使ってつじつまを合わせなくてはならないはずだから、1 行目の式にたどり着くのである。そこから (2 乗) − (2 乗) の形に気づくのはそう難しいことではないだろう。

では、もうひとつ。$a^3+b^3+c^3-3abc$ の因数分解を試みよう。これは

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b)(a^2-ab+b^2)+c^3-3abc \quad (☆)$$

にするぐらいしか思い浮かばないかもしれないが、これではどうにもならない。しかし次の事実を利用すると突破口が開く。

$\boxed{n \text{ 文字の対称式は、} n \text{ 文字の基本対称式だけで表せる}}$

まず**対称式**とは、式中のどの 2 文字を交換しても交換前と同じ式になるものをいう。たとえば a^2-ab+b^2 は対称式である。なぜなら a と b を交換した b^2-ba+a^2 は交換前の式と同じだからだ。n 文字の対称式のうち、とくに n 文字の単純和や単純積などは**基本対称式**と呼ばれる。2 文字の基本対称式は

$$a+b, \quad ab$$

の 2 つである。このことから対称式である a^2+b^2 を

$$\boxed{a^2+b^2=(a+b)^2-2ab}$$

のように、基本対称式だけで表すことはよく行われている。

また、3 文字の基本対称式は

$$a+b+c, \quad abc, \quad bc+ca+ab$$

の 3 つである。このことから、対称式である $a^3+b^3+c^3-3abc$ が因数分解できるなら、因数に基本対称式の $(a+b+c)$ が含まれている可能性が高い。そこで（☆）は $(a+b)$ ではなく $(a+b+c)$ が因数になるような式変形をするのがよいだろう。そのために $(a+b)$ を $(a+b+c-c)$ と見ることにして計算を追ってみよう。

$$
\begin{aligned}
a^3+b^3+c^3-3abc &= (a+b)(a^2-ab+b^2)+c^3-3abc \\
&= (a+b+c-c)(a^2-ab+b^2)+c^3-3abc \\
&= (a+b+c)(a^2-ab+b^2)-c(a^2-ab+b^2)+c^3-3abc \\
&= (a+b+c)(a^2-ab+b^2)-c\{(a^2-ab+b^2)-c^2+3ab\} \\
&= (a+b+c)(a^2-ab+b^2)-c\{(a^2+2ab+b^2)-c^2\} \\
&= (a+b+c)(a^2-ab+b^2)-c\{(a+b)^2-c^2\} \\
&= (a+b+c)(a^2-ab+b^2)-c(a+b+c)(a+b-c) \\
&= (a+b+c)\{(a^2-ab+b^2)-c(a+b-c)\} \\
&= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)\ .
\end{aligned}
$$

これで因数分解が完成した。完成に至るまでの道筋に特別な計算があるわけではないので、じっくり観察すれば理解できるだろう。

ちなみに因数分解ではないが、$a^3+b^3+c^3$ も基本対称式だけで表すこともできる。上の因数分解と $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(bc+ca+ab)$ であることを利用すれば

$$
a^3+b^3+c^3=(a+b+c)^3-3(a+b+c)(bc+ca+ab)+3abc
$$

となることが分かる。