指数法則

文字式の計算では、加法と減法は同類項をもとに計算すればよい。では、乗法と除法はどうだろう。始めに $a^3 \times a^4$ を考える。これは

$$\begin{aligned} a^3 \times a^4 &= (a \times a \times a) \times (a \times a \times a \times a) \\ &= a^7 \end{aligned}$$

から分かるように、$a^3 \times a^4 = a^{3+4}$ が成り立っている。一般に

$$\boxed{a^m \times a^n = a^{m+n}}$$

が成り立つ。

$a^5 \div a^3$ はどうだろう。指数の定義から

$$\begin{aligned} a^5 \div a^3 &= \frac{a \times a \times a \times a \times a}{a \times a \times a} \\ &= a^2 \end{aligned}$$

でよい。このことから分かるように、$a^5 \div a^3 = a^{5-3}$ が成り立っている。一般に

$$\boxed{a^m \div a^n = a^{m-n} \quad (m > n)}$$

が成り立つ。

しかし、$a^3 \div a^5$ となると話が微妙になってくる。

$$\begin{aligned} a^3 \div a^5 &= \frac{a \times a \times a}{a \times a \times a \times a \times a} \\ &= \frac{1}{a^2} \end{aligned}$$

であるから、$a^3 \div a^5 = \dfrac{1}{a^2}$ が成り立っている。一般に

$$\boxed{a^m \div a^n = \frac{1}{a^{n-m}} \quad (m < n)}$$

が成り立つ。

つまり、m, n の大小関係で結果が異なってしまうわけである。先回りして言うと、m, n の大小関係には、$m = n$ も含めて考えた方がよい。$m = n$ とは $a^m = a^n$ を意味するので、$a^m \div a^n = 1$ になる。結局

$$a^m \div a^n = \begin{cases} a^{m-n} & (m > n) \\ 1 & (m = n) \\ \dfrac{1}{a^{n-m}} & (m < n) \end{cases}$$

ということになる。

計算法則

この程度のことが理解できれば文字式の計算はできるものの、複雑な計算をするためには、もう少しばかり計算規則を知っておいた方がよい。加法と乗法に関しては次の規則が常に成り立つ。

$$\begin{aligned}
&a+b=b+a && \text{(加法の交換法則)}\\
&ab=ba && \text{(乗法の交換法則)}\\
&(a+b)+c=a+(b+c) && \text{(加法の結合法則)}\\
&(ab)c=a(bc) && \text{(乗法の結合法則)}\\
&a(b+c)=ab+ac && \text{(左からの分配法則)}\\
&(a+b)c=ac+bc && \text{(右からの分配法則)}
\end{aligned}$$

交換法則は演算の前後を交換できることを意味し、**結合法則**は演算の順番を入れ替えられることを意味する。また**分配法則**は、まとめてする掛け算は分配できることを意味する。減法や除法では一般に $a-b \neq b-a$、$a \div b \neq b \div a$ だから、交換法則は成り立たない。しかし、これらは $a-b=a+(-b)$、$a \div b = a \times \dfrac{1}{b}$ と見れば交換法則が使えるので、減法や除法は適宜加法や乗法に直すのがよい。このことから、たとえ式が $a+b$ や ab と書いてあるからといって、必ずしも足し算や掛け算を表すものではないことが分かる。$a+b$ であっても b が負の数かもしれないし、ab であっても b は分数かもしれないので、文字や符号で式が規定されるわけではない。文字はあくまでも数値なのである。

展開公式

数学で行われる計算は、案外型にはまったものが多い。たとえば $(a+b)^2$ のような計算は

$$\begin{aligned}
(a+b)^2 &= (a+b)(a+b) \\
&= (a+b)a+(a+b)b && \text{(左の $(a+b)$ を左からの分配法則に適用した)}\\
&= a^2+ba+ab+b^2 && \text{(右からの分配法則)}\\
&= a^2+ab+ab+b^2 && \text{(乗法の交換法則)}\\
&= a^2+2ab+b^2 && \text{(同類項をまとめた)}
\end{aligned}$$

のように、規則を厳格に適用しながら行うものだが、毎回この手順を踏むのは骨が折れる。$(a+b)^2$ は最後には $a^2+2ab+b^2$ になるのだから、

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$

を覚えれば済むことである。そこで、数学の計算でよく目にするものは、公式として覚えておくのが得策なのである。代表的な公式を順に挙げてみよう。まず

$$\boxed{\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2\\ (a-b)^2 &= a^2-2ab+b^2\\ (a+b)(a-b) &= a^2-b^2\end{aligned}}$$

のタイプがある。a や b には、文字や数値だけでなく式でさえ当てはめることができる。しかし、教科書などで目にするものは $(x+3)^2$ や $(x+1)(x-1)$ のように、文字 x と数値が当てはめられていることが多いだろう。実際、文字と数値の式を展開することは多々あるので、専用の公式

$$\boxed{\begin{aligned}(x+a)(x+b) &= x^2+(a+b)x+ab\\ (ax+b)(cx+d) &= acx^2+(ad+bc)x+bd\end{aligned}}$$

が使われる。一般に、文字 x と数値 a, b, c, d の展開式と見るが、状況に応じて柔軟に利用できなくてはならない。

公式というものは、使用頻度が高かったり関係式を導く手間がかかるからなどの理由から、“公式” として定着しているものがほとんどである。式を 3 乗することはよくあることなので、

$$\boxed{\begin{aligned}(a+b)^3 &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\\ (a-b)^3 &= a^3-3a^2b+3ab^2-b^3\end{aligned}}$$

は覚えておく方がよいだろう。また、

$$\boxed{\begin{aligned}(a+b)(a^2-ab+b^2) &= a^3+b^3\\ (a-b)(a^2+ab+b^2) &= a^3-b^3\end{aligned}}$$

の形は、「左辺 $\to$ 右辺」へ使うことより「右辺 $\to$ 左辺」へ使うことが多いので覚えておいた方がよい。とはいえ、公式は型を覚えるものだが、型にはめて使うものではない。柔軟に使えるような訓練が欠かせない。

展開公式の活用

それでは実際に、展開公式を活用してみよう。$(a+b+c)^2$ の展開を例にとる。この型は公式にはない。しかし、$a+b$ を $\boldsymbol{a}$、c を $\boldsymbol{b}$ と見ることができれば、公式 $\boldsymbol{(a+b)^2=a^2+2ab+b^2}$ が

適用できる。すなわち

$$(a+b+c)^2 = (a+b)^2 + 2(a+b)c + c^2$$

である。ここから右辺第 1 項に再び公式を適用し、右辺第 2 項に分配法則を当てはめれば、結局

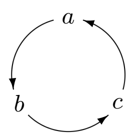
$$(a+b+c)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2$$

であることが分かる。ここで展開式を見ると、$\square^2$ と 2 ○△ の項が 3 つずつで構成されているので、覚えやすいと感じるだろう。そう思えば、これを新たな公式として覚えればよいのである。

$$\boxed{(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2bc + 2ca + 2ab}$$

*　　*　　*

$(a+b+c)^2$ の展開公式を　$a^2 + b^2 + c^2 + 2bc + 2ca + 2ab$　と書いたのには訳がある。前半に 2 乗の項をアルファベット順に書き、後半に係数 2 の項を書けば統一感があるからである。それなら後半はアルファベット順に $2ab + 2ac + 2bc$ がよいと思われるかもしれない。言わば辞書式に並べるわけだが、数学では辞書順より**巡回**に重きを置くものである。つまり



のサイクルでつなげる方がきれいなのだ。では、$2ab+2bc+2ca$ でないのはなぜ?　それは、項の構成まで考慮したからだ。展開式の前半は $\{X^2 \text{の項} \mid X \text{ は } a,b,c\}$ で構成されるので、展開式の後半は $\left\{\dfrac{2abc}{X}\text{の項} \,\middle|\, X \text{ は } a,b,c\right\}$ と記述することで統一感が増すのである。▮