文字式

小学校では掛け算において、たとえば 5 の段は

$$5\times 1,\quad 5\times 2,\quad 5\times 3,\quad 5\times 4,\quad 5\times 5,\quad \ldots$$

と続くものだが、これを $5\times a$ のように書けば、5 の段の仕組みをひとつの式で見ることができる。また小学校では、$2+3$ と $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}$ では計算方法を区別をしたものと思う。具体的には、分数の計算は**通分**をしなくてはならない。しかし、数直線上のベクトルを考えれば、どちらも $a+b$ という加法であることに変わりない。このように、具体的な数値の代わりに文字を使えば、計算の本質を抽出することができ便利である。そこで、これからは積極的に数値の代わりに文字を使うことにしよう。

文字を使うようになると、考え方も柔軟にする必要がある。文字はいつでも数値に代わる可能性がある。場合によっては、式に代わることもある。数学では、文字は文字リテラル（文字そのもの）ではないのである。そのため、数値の代わりに使う文字を**未知数**と呼ぶ。したがって

$$a=b$$

という表現は当然正しい。ここでの文字は未知数であるから、$a=2$、$b=2$ であれば $a=b$ である。a と b を文字リテラルと見たら、こうはならないし、そもそも文字列を等号で比較することはしないものである。

文字を計算に使うときは約束事が必要になる。$a+b$ や $a\times b$ などと書いてあれば、それらは何らかの数値を足したり掛けたりしていることが分かる。もしかしたら、何らかの数値でなく、何らかの式を文字で表しているのかもしれない。ただし文字の中身が何であれ、足し算は $a+b$、引き算は $a-b$ と書くが、掛け算は記号 “×” を省略して ab、割り算は記号 “÷” を用いず $\dfrac{a}{b}$ と書くことにしている。$a\div b=\dfrac{a}{b}$ である。記号を省略する理由は、なくても意味が通じることと、たとえば $a+b\times c$ と書くより $a+bc$ と書くほうが掛け算が優先されることが一目で分かるからだ。

$$\boxed{a\times b\to ab、\quad a\div b\to\frac{a}{b}\quad \text{と記述する}}$$

文字と数値を混ぜて書くこともある。$a+5$ や $a\times 5$ などがそうである。$a+5$ は省略するところはない。演算記号としての “+” や “−” が省略されることはないからだ。しかし、$a\times 5$ は掛け算記号を省略するが、$a5$ ではなく $5a$ と書く。文字と数の積は数を文字の前に書くように統一しているからだ。$a\times 5$ と $5\times a$ では意味が違う場合があるかもしれないが、計算して値を求めるという

立場では同じ値になるので、いちいち区別しない。とくに、$a \times 1$ や $a \times (-1)$ の場合は a や $-a$ と書く。1 を掛けることは数値的に変化をもたらさないので、一般に積における 1 は省略される。

$$\boxed{\begin{array}{l} a \times 5 \to 5a \text{ のように、数は文字の前に書く} \\ 1a \to a,\ -1a \to -a \text{ のように、1 は省略する} \end{array}}$$

記号 “×” を省略することに慣れると、2×5 も何とかならないかと思うかもしれないが、これを省略すると 25 になってしまい具合が悪い。しかし、“×” が目障りと思えば記号 “·” を使ってもよい。つまり $2 \cdot 5$ と書いてよい。ここでも、$3 + 2 \times 5$ より $3 + 2 \cdot 5$ のほうが掛け算優先が分かりやすいだろう。

文字式の計算

文字が数や式を隠しているものだとすれば、文字は計算の対象にならなくてはいけない。たとえば $3a + 4a$ は、a が何か分からなければ実際の数値を求められないが、少なくとも $3a + 4a = 7a$ である。そのことは具体的に $a = 5$ などを考えてみれば、先に 5 を 3 倍や 4 倍してから足すのと、最初から 7 倍するのとは同じことであることから分かる。実際は

$$\begin{aligned} 3a + 4a &= (a + a + a) + (a + a + a + a) \\ &= 7a \end{aligned}$$

と考える。引き算も同様だ。このことから、一般に

$$\boxed{ma + na = (m + n)a, \qquad ma - na = (m - n)a}$$

という規則が見えてくる。すべて文字で書かれた式だが、ここでは m, n は文字の前にある数値と思わなくてはいけない。文字の前に掛けられている数を**係数**と呼ぶ。

また、$a \times b$ は ab と書くより仕方ないが、$a \times a$ は aa ではなく a^2 と書く。右肩の数は**指数**といい、同じ数がいくつ掛けられているかを表している。このことから

$$\boxed{\underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n\text{ 個}} = a^n}$$

と書くことになる。これは、記述の約束である。とくに、$a = 1$ のときは a^1 ではなく a である。ここでも、1 が省略される約束が生きている。

さて、負の数の計算を見てきたときに、項という考えに触れた。項は、計算式において足し算でつながれたひとつひとつのまとまりを指す。したがって、$3a+4a$ における項は $3a$ と $4a$ であり、$\dfrac{a}{b}$ はそれ自体がひとつの項である。ところで、$a+b$ はこれ以外に書きようがないが、$3a+4a$ は $7a$ と書くことができた。このように、和についてまとめることができる項を**同類項**と呼ぶ。別の言い方をすれば、同じ文字を同じ個数含んでいる項が同類項だ。よって、$3a^2b$ と $4a^2b$ は同類項なので $3a^2b+4a^2b=7a^2b$ とまとめることができるが、$3a^2b$ と $4ab^2$ は同類項ではないから、$3a^2b+4ab^2$ はこれ以上まとめられない。

では、$3a^2b^2$ と $4(ab)^2$ はどうか。この 2 つは、同じ文字を同じ個数含んでいるので同類項なのだが、$a^2b^2=(ab)^2$ であることは次のようにして分かる。

$$\begin{aligned}(ab)^2 &= (ab)(ab) && (1)\\ &= abab && (2)\\ &= aabb && (3)\\ &= a^2b^2\ . && (4)\end{aligned}$$

何を回りくどいことをしているかと思われるかもしれない。しかし数学では、明らかな事実だけを用いて議論しなければならない。(1) は指数の記述の約束に従っている。(2) は計算する上で不要な ( ) を省略した。(3) は掛け算において掛ける順が交換できることを用いた。そして (4) で指数の記述に従ったのである。この理屈から

$$\boxed{(ab)^n=a^nb^n}$$

であることが分かる。そして、この瞬間に $(ab)^n=a^nb^n$ は自由に使ってよい性質になるのである。

* * *

$(ab)^2=a^2b^2$ の説明をどう感じただろうか。a を 2 つ掛けるとき a^2 と書く約束があるのだから、$(ab)^2$ は約束に従って a^2b^2 と書くだけの話ではないか、と思われている人がほとんどではないかと推察する。日常的にはそのような認識で何ら問題は起きないが、数学は違うのである。数学で約束されたことは**定義**という。定義はそのまま使ってよい。そして、定義から正しい論理で導かれたことがらは**定理**と呼ぶ。定理もそのまま使ってよい。さて、この時点でそのまま使えるものは何だろうか。それは

a を 2 つ掛けるとき a^2 と書く

だけであるから、$(ab)^2$ と書かれたものは ab を 2 つ掛けていることだけが保証されているのである。だから、$(ab)^2=abab$ は保証されているが、$abab=aabb$ になる保証は、いまのところない。しかし数の積における定義では、積の前後を交換できることが定められているし、$abab$ は文字で書かれているが実際は数値の積である。このことから、一部の数値を交換しながら

$$(ab)^2=abab=aabb=a^2b^2$$

と計算できたのである。すると $(ab)^2 = a^2b^2$ は、少々大げさに聞こえるかもしれないが定理である。これをもって、$(ab)^2 = a^2b^2$ はいつでも使ってよいことになった。▮

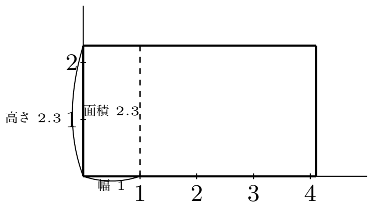
積の定義

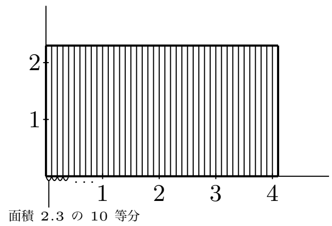
n 個の a を足すことを na と定義すること、すなわち $\overbrace{a+a+\cdots+a}^{n\text{ 個}} = na$ であることは容易に受け入れられるだろうが、この定義では 2.3×4.1 に理屈をつけられない。そこで積のもうひとつの定義として、長方形の面積を考えることにする。

2.3×4.1 は 2.3 が 4.1 個あると見ることはできない。個数は整数で数えるものだからだ。そこでまず、高さが 2.3 で幅が 1 の長方形の面積が 2.3 であると定義すると、もし面積 2.3 の長方形が 4 個集まれば、

$$2.3 \times 4 = 2.3 + 2.3 + 2.3 + 2.3 = 9.2$$

という計算ができる。しかし、いままで通りの定義では 4.1 個分の計算はできない。



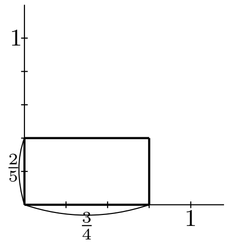


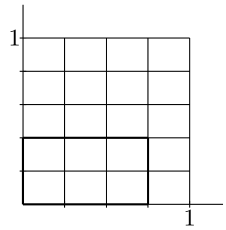
それを計算する工夫として、面積 2.3 の長方形を 10 等分する。10 等分を分数表記で $\dfrac{2.3}{10}$ と書けば、2.3×4.1 は 2.3 が 4.1 個あるのではなく、$\dfrac{2.3}{10}$ が 41 個あることになる。すなわち

$$2.3 \times 4.1 = \frac{2.3}{10} \times 41 = \underbrace{\frac{2.3}{10} + \frac{2.3}{10} + \cdots + \frac{2.3}{10}}_{41\text{ 個}} = \frac{94.3}{10} = 9.43$$

という計算が成り立つ。これで面積の計算も、個数を数える計算に直せることが分かった。

さて、このような考えに基づけば、たとえば $\dfrac{2}{5} \times \dfrac{3}{4}$ も個数を数える計算に直せることになる。そこで $\dfrac{2}{5} \times \dfrac{3}{4}$ を、縦 $\dfrac{2}{5}$、横 $\dfrac{3}{4}$ の長方形の面積と考える。$\dfrac{2}{5}$ は長さ 1 を 5 等分したうちの 2 個、$\dfrac{3}{4}$ は長さ 1 を 4 等分したうちの 3 個と見ればよい。





すると $\dfrac{2}{5}\times\dfrac{3}{4}$ を計算することは、縦横を 5×4 分割、すなわち 20 等分したうちの、$2\times 3=6$ 個のブロックを数えることである。したがって $\dfrac{2}{5}\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{6}{20}$ がいえる。このことから分数の掛け算は、分子・分母どうしの積で求められることが分かるのである。

*　　*　　*

話のついでに、分数の割り算は分子・分母を逆にした分数を掛けて計算する理由を述べておこう。

たとえば分数の掛け算が $\dfrac{a}{b}\times\dfrac{x}{y}=\dfrac{a\times x}{b\times y}=\dfrac{c}{d}$ のようになされたとすると、

$$a\times x=c,\quad b\times y=d \qquad \text{より} \qquad a=c\div x,\quad b=d\div y \quad (※)$$

である。一方で掛け算 $\dfrac{a}{b}\times\dfrac{x}{y}=\dfrac{c}{d}$ は、割り算 $\dfrac{c}{d}\div\dfrac{x}{y}=\dfrac{a}{b}$ と同じことを意味する。ここに（※）の a, b を代入すると

$$\frac{c}{d}\div\frac{x}{y}=\frac{c\div x}{d\div y} \quad (☆)$$

が成り立つことが分かる。

さて（☆）であるが、$\dfrac{c}{d}$ が $\dfrac{x}{y}$ で割られることを見越して、$\dfrac{c}{d}$ を x と y の公倍数である $x\times y$ で通分しておく。すると

$$\frac{c}{d}\div\frac{x}{y}=\frac{c\times x\times y}{d\times x\times y}\div\frac{x}{y}=\frac{c\times x\times y\div x}{d\times x\times y\div y}=\frac{c\times y}{d\times x}=\frac{c}{d}\times\frac{y}{x}$$

が成り立つ。

このことから、$\dfrac{x}{y}$ で割ることと $\dfrac{y}{x}$ を掛けることが同じであることが分かるであろう。▮